Correction de l'exercice du jour 1 : intégration, calcul d'aire

Partie A

1. Calculons les limites en 0 et en $+\infty$:

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty\\ \displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} -2+x = -2\end{array}\right\} \overset{\text{par somme des limites}}{\Longrightarrow} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty.$$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} -2+x = +\infty\end{array}\right\} \overset{\text{par somme des limites}}{\Longrightarrow} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

2. Pour tout réel $x>0$, $f'(x) = 1+\dfrac{1}{x}$. Comme $x>0$ on en déduit que $f'(x)>0$ ce qui prouve que f est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

x	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$+$
Variations de f	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

3. La fonction f est continue sur $]0\,;+\infty[$, strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.
$0\in]-\infty\,;+\infty[$ intervalle image de l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par la fonction f, donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires dans le cas des fonctions strictement croissantes, l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α dans $]0\,;+\infty[$.
La calculatrice donne $1,55<\alpha<1,56$.

Partie B

1. On résout l'équation $\ln(x) = 2-x$.
Or $\ln(x)=2-x \iff \ln(x)-2+x=0 \iff f(x)=0$. D'après la partie A, l'équation $f(x)=0$ a une solution unique α dans $]0\,;+\infty[$.
Le point E a donc pour coordonnées $(\alpha\,;2-\alpha)$.

2. **a.** Sur l'intervalle $[1\ \ \alpha]$ on a $\ln(x)\geqslant 0$ donc I désigne l'aire sous la courbe de ln entre les droites d'équation $x=1$ et $x=\alpha$.

b. Pour tour réel $x>0$ on a $F'(x) = \ln(x)-1+x\times\dfrac{1}{x}$ soit $F'(x)=\ln(x)$ ce qui montre que F est une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.

c. $I=\displaystyle\int_1^\alpha \ln x\,\mathrm{d}x = [x(\ln(x)-1)]_1^\alpha$ donc $I=\alpha(\ln(\alpha)-1)-(-1)$ donc $I=\alpha(2-\alpha-1)+1$ vu que $\ln(\alpha)=2-\alpha$. On en déduit que $I=-\alpha^2+\alpha+1$.

3. $\mathscr{A}$ désigne l'aire sous la courbe de ln entre 1 et α ajoutée à celle sous la droite $\mathscr{D}$ entre α et 2. $\mathscr{A}=\displaystyle\int_1^\alpha \ln x\,\mathrm{d}x+\int_\alpha^2 2-x\,\mathrm{d}x$. Or $\displaystyle\int_1^\alpha \ln x\,\mathrm{d}x = -\alpha^2+\alpha+1$.
De plus $\displaystyle\int_\alpha^2 2-x\,\mathrm{d}x = \left[2x-\frac{1}{2}x^2\right]_2^\alpha = 2+\frac{1}{2}\alpha^2-2\alpha$ soit $\displaystyle\int_\alpha^2 2-x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\alpha^2-2\alpha+2$.
On en déduit que $\mathscr{A} = -\alpha^2+\alpha+1+\dfrac{1}{2}\alpha^2-2\alpha+2$ soit $\mathscr{A}=-\dfrac{1}{2}\alpha^2-\alpha+3$.