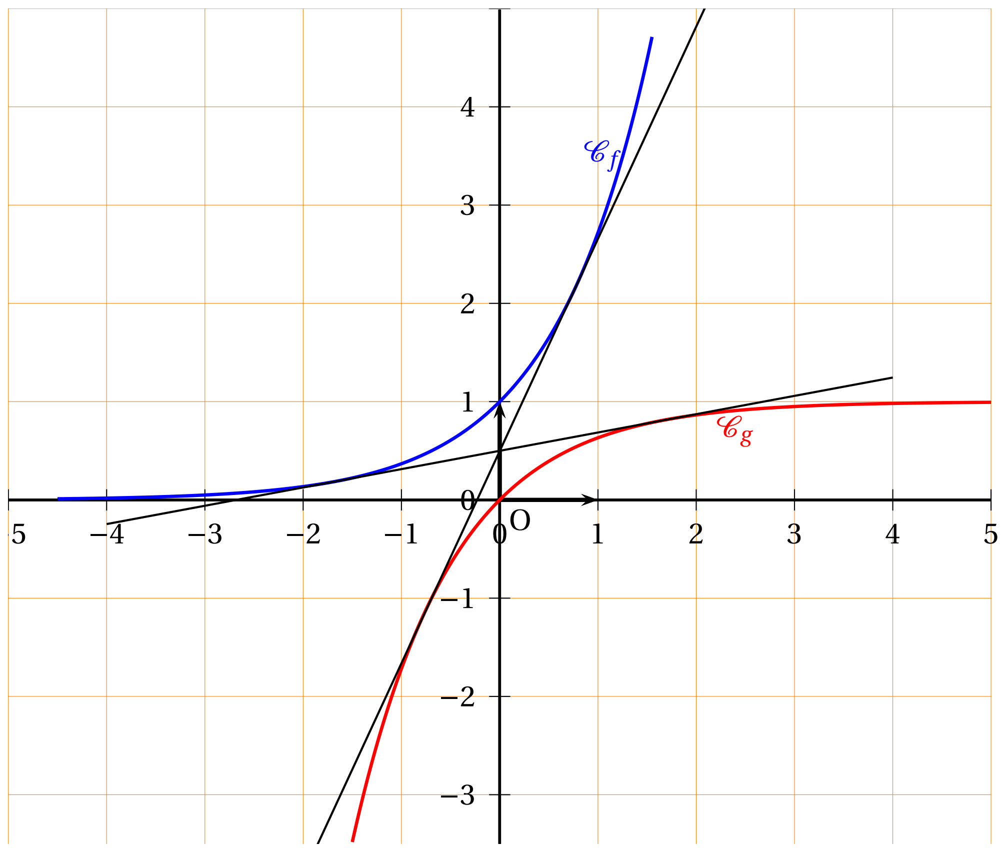
Partie A



Partie B

1. **a.** Les fonctions f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a $f'(x) = \mathrm{e}^{x}$ et $g'(x) = -\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)$.

   Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A est égal à $f'(a)$, ainsi $f'(a) = \mathrm{e}^{a}$.

   b. De même le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point B est égal à $g'(b)$ donc $g'(b) = \mathrm{e}^{-b}$.

   c. Si les deux tangentes sont communes alors le coefficient directeur de leurs équations réduites sont égaux, soit :

   $f'(a) = g'(b) \iff \mathrm{e}^{a} = \mathrm{e}^{-b} \iff b = -a.$

2. Une équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A est égale à :

   $y - \mathrm{e}^{a} = \mathrm{e}^{a}(x-a) \iff y = x\mathrm{e}^{a} + \mathrm{e}^{a}(1-a).$

   Une équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point B est égale à :

   $y - \left(1 - \mathrm{e}^{-b}\right) = \mathrm{e}^{-b}(x-b) \iff y = x\mathrm{e}^{-b} + 1 - \mathrm{e}^{-b} - b\mathrm{e}^{-b}.$

   Ou en remplaçant $-b$ par a :

   $y = x\mathrm{e}^{a} + 1 - \mathrm{e}^{a} + a\mathrm{e}^{a} \iff y = x\mathrm{e}^{a} + 1 + \mathrm{e}^{a}(a-1).$

   Si les deux tangentes sont communes, leurs équations réduites sont les mêmes. On a déjà vu l'égalité des coefficients directeurs. Les ordonnées à l'origine sont aussi les mêmes soit :

   $\mathrm{e}^{a}(1-a) = 1 + \mathrm{e}^{a}(a-1) \iff \mathrm{e}^{a}(2-2a) = 1 \iff 2(a-1)\mathrm{e}^{a} + 1 = 0.$

Donc a est solution de l'équation dans $\mathbb{R}$:

$$2(x-1)\mathrm{e}^{x}+1=0.$$

Partie C

1. **a.** En $-\infty$, nous avons une forme indéterminée du type « $\infty \times 0$ » , on change donc d'écriture.
$\forall x \in \mathbb{R},\quad \varphi(x)=2x\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{x}+1.$

On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}x\mathrm{e}^{x}=0$ d'après le cours, d'où par somme de limite : $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=1$.

La droite d'équation $y=1$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de φ au voisinage de $-\infty$.

On a $\lim\limits_{xto+\infty}(x-1)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{x}=+\infty$, d'où par somme de limites : $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty$.

b. φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$\varphi'(x)=2\mathrm{e}^{x}+2(x-1)\mathrm{e}^{x}=2x\mathrm{e}^{x}$.

Comme, quel que soit $x\in\mathbb{R}$; $\mathrm{e}^{x}>0$, le signe de $\varphi'(x)$ est celui de x.

Donc sur $]-\infty\ ;\ 0[$, $\varphi'(x)<0$: la fonction est décroissante sur cet intervalle et sur $]0\ ;\ +\infty[$, $\varphi'(x)>0$: la fonction φ est croissante sur cet intervalle. D'où le tableau de variations :

c.

x	$-\infty$	α	0	β	$+\infty$
Signe de $\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de φ	1	0	-1	0	$+\infty$

2. **a.** Sur $]-\infty\ ;\ 0]$ la fonction φ est continue et strictement décroissante . $0\in[-1\ ;\ 1]$ intervalle image de l'intervalle $]-\infty\ ;\ 0]$ par la fonction φ. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel unique α de $]-\infty\ ;\ 0]$ tel que $\varphi(\alpha)=0$.

Le même raisonnement sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ montre qu'il existe un réel unique de cet intervalle β tel que $\varphi(\beta)=0$.

Donc l'équation $\varphi(x)=0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.

b. La calculatrice donne successivement :

$\varphi(-2)\simeq 0,18$ et $\varphi(-1)\simeq -0,47$, donc $-2<\alpha<-1$;

$\varphi(-1,7)\simeq 0,013$ et $\varphi(-1,6)\simeq -0,05$, donc $-1,7<\alpha<-1,6$;

$\varphi(-1,68)\simeq 0,001$ et $\varphi(-1,67)\simeq -0,005$, donc $-1,68<\alpha<-1,67$;

$\varphi(-1,679)\simeq 0,00041$ et $\varphi(-1,678)\simeq -0,0002$, donc $-1,679<\alpha<-1,678$.

Conclusion : au centième près $\alpha\simeq -1,68$.

De la même façon on obtient $\beta\simeq 0,77$.

Partie D

1. Le coefficient directeur de la tangente en E à $\mathscr{C}_f$ est e^{α}.

   Le coefficient directeur de la droite (EF) est : $\dfrac{1-\mathrm{e}^{\alpha}-\mathrm{e}^{\alpha}}{-\alpha-\alpha}=\dfrac{1-2\mathrm{e}^{\alpha}}{-2\alpha}$.

   Or α est solution de l'équation : $2(x-1)\mathrm{e}^{x}+1=0$, autrement dit

   $2(\alpha-1)\mathrm{e}^{\alpha}+1=0 \iff 2\alpha\mathrm{e}^{\alpha}=2\mathrm{e}^{\alpha}-1$, d'où en revenant au coefficient directeur de la droite (EF) : $\dfrac{1-2\mathrm{e}^{\alpha}}{-2\alpha}=\dfrac{-2\alpha\mathrm{e}^{\alpha}}{-2\alpha}=\mathrm{e}^{\alpha}$

   Conclusion : la droite (EF) est bien la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse α et la tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse $-\alpha$.

2. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse $-\alpha$ est $\mathrm{e}^{-(-\alpha)}=\mathrm{e}^{\alpha}$.

   On a vu dans la question précédente que la droite (EF) a pour coefficient directeur e^{α} et contient le point F.

   Conclusion : la droite (EF) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse $-\alpha$.