Première partie

En intégrant par parties avec :

$$\begin{array}{lll} u(x) = x & v'(x) = \mathrm{e}^x & \\ u'(x) = 1 & v(x) = \mathrm{e}^x & \text{par exemple} \end{array}$$

Les fonctions u et v étant dérivables et les fonctions u' et v' continues, on obtient :
$\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \left[x\mathrm{e}^x\right]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \left[x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x\right]_0^1 = \left[\mathrm{e}^x(x-1)\right]_0^1 = 0 - 1 \times (-1) = 1.$

Deuxième partie

1. L'aire de la partie A est en unités d'aire l'intégrale calculée ci-dessus soit 1.
L'aire du rectangle est e donc par différence l'aire de la partie B est e − 1.
On sait que le tableau suivant est un tableau de proportionnalité :

	A	B	Total
aire	1	e − 1	e
Probabilité			$\dfrac{1}{2}$

On en déduit aussitôt que la probabilité d'atteindre la partie A est $\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$ et que la probabilité d'atteindre la partie B est $\dfrac{\mathrm{e}-1}{2\mathrm{e}}$.

2. a. On effectue trois fois la même expérience aléatoire avec comme succès : « atteindre la partie A » de probabilité $\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$ et comme échec : « rater la partie A ». On a donc une loi de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p = \dfrac{1}{2\mathrm{e}}$.

L'espérance est $\mathrm{E}(X) = n \times p = 3 \times \dfrac{1}{2\mathrm{e}} = \dfrac{3}{2\mathrm{e}} \approx 0,552$.

b. On a $p(\mathrm{E}) = p(X = 2) = \binom{3}{2}\left(\dfrac{1}{2\mathrm{e}}\right)^2 \times \left(1 - \dfrac{1}{2\mathrm{e}}\right) = \dfrac{3 \times 1 \times (2\mathrm{e}-1)}{8\hat{\mathrm{e}}^3} \approx 0,083$ à 10^{-3} par excès.

c. On considère de même la loi de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et
$p = \dfrac{\mathrm{e}-1}{2\mathrm{e}}$.

On sait que $p(F) = \binom{3}{3} \times \left(\dfrac{\mathrm{e}-1}{2\mathrm{e}}\right)^3 = \dfrac{(\mathrm{e}-1)^3}{8\mathrm{e}^3}$.

d. Soit G l'évènement : « les trois fléchettes ont atteint la partie A ou la partie B ».

$p(G) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{8}$.

On sait que $p_{\mathrm{G}}(\mathrm{F}) = \dfrac{p(\mathrm{F} \cap \mathrm{G})}{p(\mathrm{G})} = \dfrac{p(\mathrm{F})}{p(\mathrm{G})} = \dfrac{\dfrac{(\mathrm{e}-1)^3}{8\mathrm{e}^3}}{\dfrac{1}{8}} = \dfrac{(\mathrm{e}-1)^3}{\mathrm{e}^3} \approx 0,253.$

3. **a.** On a $p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0)$.

$p(X=0) = \binom{n}{0}\left(\dfrac{1}{2\text{e}}\right)^0 \times \left(1 - \dfrac{1}{2\text{e}}\right)^n = \left(1 - \dfrac{1}{2\text{e}}\right)^n$.

Finalement : $p(X \geqslant 1) = 1 - \left(1 - \dfrac{1}{2\text{e}}\right)^n$.

b. $p_n \geqslant 0,99 \iff 1 - \left(1 - \dfrac{1}{2\text{e}}\right)^n \geqslant 0,99 \iff \left(1 - \dfrac{1}{2\text{e}}\right)^n \leqslant 0,01 \iff$

$n \ln\left(1 - \dfrac{1}{2\text{e}}\right) \leqslant \ln 0,01 \iff n \geqslant \dfrac{\ln 0,01}{\ln\left(1 - \dfrac{1}{2\text{e}}\right)}$, (puisque $\ln\left(1 - \dfrac{1}{2\text{e}}\right) < 0$). D'où finalement,

puisque $\dfrac{\ln 0,01}{\ln\left(1 - \dfrac{1}{2\text{e}}\right)} \approx 22,7$, le plus petit entier n tel que $p_n \geqslant 0,99$ est l'entier 23.