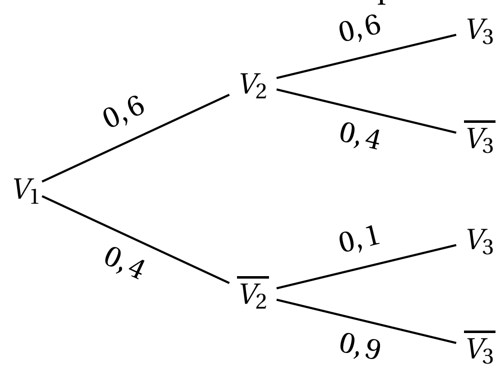
Correction du jour 12

1. a. On commence par modéliser la situation avec un arbre pondéré :



A : $p\left(V_2 \cap V_3\right) = p\left(V_2\right) \times p_{V_2}\left(V_3\right) = 0,6 \times 0,6 = 0,36$.

B : On a $p\left(V_2\right) = 0,6 \Rightarrow p\left(\overline{V_2}\right) = 1 - 0,6 = 0,4$ et d'après l'énoncé $p_{\overline{V_2}}\left(\overline{V_3}\right) = 0,9$.

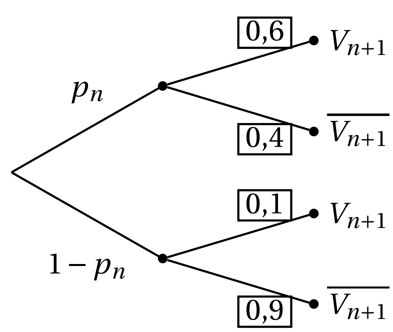
Donc $p\left(\overline{V_2} \cap \overline{V_3}\right) = p\left(\overline{V_2}\right) \times p_{\overline{V_2}}\left(\overline{V_3}\right) = 0,4 \times 0,9 = 0,36$.

2. V_2 et $\overline{V_2}$ forment une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p_3 &= p\left(V_3\right) = p\left(V_3 \cap V_2\right) + p\left(V_3 \cap \overline{V_2}\right) \\ &= 0,36 + p\left(\overline{V_2}\right) \times p_{\overline{V_2}}\left(V_3\right) \\ &= 0,36 + 0,4 \times 0,1 \\ &= 0,4 \end{aligned}$$

Conclusion : $p_3 = 0,36 + 0,04 = 0,4$.

3. Voici l'arbre modélisant la situation :



4. V_n et $\overline{V_n}$ forment une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= P\left(V_n \cap V_{n+1}\right) + P\left(\overline{V_n} \cap V_{n+1}\right) \\ &= p_n \times 0,6 + \left(1 - p_n\right) \times 0,1 \\ &= 0,6p_n + 0,1 - 0,1p_n \\ &= 0,5p_n + 0,1 \end{aligned}$$

5. **a.** Démontrons par récurrence que $p_n > 0,2$: soit $\mathscr{P}_n$ la proposition : $p_n > 0,2$.

- **Initialisation.** On sait que $p_1 = 1$ donc $p_1 > 0,2$; la proposition est vraie au rang 1.
- **Hérédité**
  Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie c'est-à-dire $p_n > 0,2$.
  D'après l'hypothèse de récurrence, $p_n > 0,2$ donc $0,5p_n > 0,1$ et donc $0,5p_n + 0,1 > 0,2$ qui signifie $p_{n+1} > 0,2$. La proposition est donc vraie au rang $n+1$.
- **Conclusion**
  $\mathscr{P}_1$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire à partir du rang 1 donne $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

On a donc démontré que, pour tout entier naturel non nul, $p_n > 0,2$.

b. $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} p_{n+1} - p_n &= 0,5p_n + 0,1 - p_n \\ &= 0,1 - 0,5p_n \end{aligned}$$

Or pour tout entier naturel non nul, $p_n > 0,2$ donc $0,5p_n > 0,1$ donc $-0,5p_n < -0,1$ et ainsi $0,1 - 0,5p_n < 0$.
On en déduit que, pour tout $n \geqslant 1$, $p_{n+1} - p_n < 0$ et donc que la suite (p_n) est décroissante.

c. La suite (p_n) est décroissante et minorée par $0,2$: la suite (p_n) converge vers une limiteℓ telle que $\ell \geqslant 0,2$.
Sa limite ℓ vérifie $\ell = 0,5\ell + 0,1$ d'où $\ell = 0,2$.

6. **a.** Pour tout entier naturel n non nul,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= p_{n+1} - 0,2 \\ &= 0,5p_n + 0,1 - 0,2 \\ &= 0,5p_n - 0,1 \\ &= 0,5\left(p_n - 0,2\right) \\ &= 0,5u_n \end{aligned}$$

Cette égalité montre que la suite u est la suite géométrique de raison $0,5$ et de terme est $u_1 = p_1 - 0,2$ soit $u_1 = 0,8$.

b. On sait que pour tout entier naturel n non nul $u_n = u_1 \times q^{n-1}$ donc $u_n = 0,8 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Or, de la définition de u_n il résulte que $p_n = 0,2 + 0,8 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.

c. On sait que $0 < \dfrac{1}{2} < 1$ entraîne que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 0,8 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} p_n = 0,2$ et on retrouve le résultat de la question 5.c.