Correction du jour 13 : logarithme et aire

Partie A

1. **a.** $1 \leqslant x \leqslant 2 \Rightarrow 0 \leqslant \ln x \leqslant \ln 2 \Rightarrow 0 \leqslant x\ln x \leqslant 2\ln 2 \Rightarrow 1 \leqslant 1 + x\ln x \leqslant 1 + 2\ln 2$.
   La fonction f est positive sur $[1;2]$.

   b. On a M$(1 ; 1)$ et N$(2 ; 1+2\ln 2)$: le coefficient directeur de la droite (MN) est $\dfrac{y_N - y_M}{x_N - x_M}$ soit $\dfrac{1+2\ln 2-1}{2-1} = 2\ln 2$.

   c. Une équation de la tangente T_a à $\mathscr{C}_f$ en un point de coordonnées $(a ; f(a))$, avec $1 \leqslant x \leqslant 2$ est : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
   Or $f'(x) = \ln x + x \times \dfrac{1}{x} = 1 + \ln x$: deux droites sont parallèles lorsqu'elles ont le même coefficient directeur.
   Donc $f'(x) = 2\ln 2 \iff 1+\ln x = 2\ln 2 \iff \ln x = 2\ln 2 - \ln \mathrm{e} \iff \ln x = \ln(4) - \ln \mathrm{e}) \iff x = \dfrac{4}{\mathrm{e}}$:
   Il existe donc un seul point E entre M et N où la tangente à la courbe est parallèle à la droite (MN).

   d. D'après la question précédente l'équation de T est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ avec $a = \dfrac{4}{\mathrm{e}}$.
   L'équation de la tangente en E est donc (puisque le coefficient directeur est égal à $2\ln 2$) :

   $$y = (2\ln 2)x + 1 - \frac{4}{\mathrm{e}}$$

   e. f' est dérivable sur $[1;2]$ et $f''(x) = \dfrac{1}{x} > 0$: f est donc convexe sur $[1;2]$ et la courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessus de la tangente T.

2. **a.** On a M$'\left(1 ; 2\ln 2 - \dfrac{4}{\mathrm{e}} + 1\right)$ et N$'\left(1 ; 4\ln 2 - \dfrac{4}{\mathrm{e}} + 1\right)$.
   aire(MNQP) $= \dfrac{1}{2}(f(1) + f(2)) \times \text{PQ} = \dfrac{1+1+2\ln 2}{2} \times 1 = 1 + \ln 2$.
   aire(M$'$N$'$QP) $= \dfrac{2\ln 2 - \frac{4}{\mathrm{e}} + 1 + 4\ln 2 - \frac{4}{\mathrm{e}} + 1}{2} \times \text{PQ} = 3\ln 2 - \dfrac{4}{\mathrm{e}} + 1$.

   b. Avec l'hypothèse que la courbe reste sous la droite (MN) on en déduit l'encadrement :

   $$1 + \ln 2 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 3\ln 2 - \frac{4}{\mathrm{e}} + 1$$
   $$\text{soit} \quad 1,607 < \mathscr{A} < 1,694$$

   $$\text{Conclusion } \ 1,6 < \mathscr{A} < 1,7 \quad \text{à } 10^{-1} \text{ près}$$

Partie B

1. Intégration par parties : $u'(x) = x$; $v(x) = \ln x$
   Donc $u(x) = \dfrac{x^2}{2}$; $v'(x) = \dfrac{1}{x}$. Les dérivées u' et v' étant continues sur $[1;2]$,

   $$\int_1^2 x\ln x \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2\ln x}{2}\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2\ln x}{2} - \frac{x^2}{4}\right]_1^2 = \frac{4\ln 2}{2} - 1 - 0 + \frac{1}{4} = 2\ln 2 - \frac{3}{4}.$$

2. $\mathscr{A}$ est, par définition la mesure de la surface limitée par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$.

D'où $\mathscr{A} = \displaystyle\int_1^2 (1 + x\ln x)\,\mathrm{d}x = \int_1^2 1 \cdot \mathrm{d}x + \int_1^2 x\ln x\,\mathrm{d}x = 1 + 2\ln 2 - \frac{3}{4} = 2\ln 2 + \frac{1}{4}$.

$$\text{Conclusion :}\quad \mathscr{A} = 2\ln 2 + \frac{1}{4}.$$