Correction du jour 14 : fonction exp

1. La largeur de l'arc de chaînette est égal à $2x$ et sa hauteur est égale à $\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}-2)$.

Le problème étudié revient à résoudre l'équation $\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}-2)=2x$

$\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}-2)=2x \iff \mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}-2=4x \iff \mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}-2-4x=0$

2. a. Pour $x>0$, $x\left(\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x}-4\right)=\cancel{x}\times\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{\cancel{x}}-4x=\mathrm{e}^{x}-4$ donc $f(x)$ peut bien s'écrire sous la forme proposée.

b. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{x}}{x}=+\infty$ par croissance comparée, donc par somme puis produit,

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\mathrm{e}^{x}}{x}-4\right)=+\infty$; $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}=0$

Par somme, on obtient $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$

3. a. $\boxed{f'(x)=\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}-4}$

b. $f'(x)=0 \iff \mathrm{e}^{x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}}-4=0 \iff \dfrac{(\mathrm{e}^{x})^{2}-4\mathrm{e}^{x}-1}{\mathrm{e}^{x}}=0 \iff (\mathrm{e}^{x})^{2}-4\mathrm{e}^{x}-1=0.$

c. Si on pose $X=\mathrm{e}^{x}$ alors $(\mathrm{e}^{x})^{2}-4\mathrm{e}^{x}-1=0 \iff X^{2}-4X-1=0$

$\Delta=16-4\times1\times(-1)=16+4=20>0$ donc l'équation admet deux solutions :

$X_1=\dfrac{4-\sqrt{20}}{2}=\dfrac{4-2\sqrt{5}}{2}=2-\sqrt{5}\approx-0,24<0$ et $X_2=2+\sqrt{5}\approx4,24>0$

$\mathrm{e}^{x}=2-\sqrt{5}$ n'a pas de solution car $\mathrm{e}^{x}>0$ et $\mathrm{e}^{x}=2+\sqrt{5} \iff x=\ln(2+\sqrt{5})$.

Donc $f'(x)$ s'annule pour une seule valeur égale à $\ln(2+\sqrt{5})$

4. a. On obtient le tableau de variations suivant :

x	0	$\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$	$+\infty$
$f(x)$	0 ↘	$f\left(\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right)$	↗ $+\infty$

avec $f(0)=1+1-0-2=0$
et $f\left(\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right)\approx-3,3$

b. — Sur $\left]0\,;\ln(2+\sqrt{5})\right]$, $f(x)<0$ donc l'équation $f(x)=0$ n'a pas de solution.

— Sur $[\ln(2+\sqrt{5}\,;+\infty[$, f est continue et strictement croissante.

$0\in\left[f(\ln(2+\sqrt{5}))\,;\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)\right[$ car $f(\ln(2+\sqrt{5}))\approx-3,3<0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation admet une unique solution α.

5. a.

m	a	b	$b-a$	$f(m)$
	2	3	1	
2,5	2	2,5	$0,5>0,1$	$\approx0,26>0$
2,25	2,25	2,5	$0,25>0,1$	$\approx-1,4<0$
2,375	2,375	2,5	$0,125>0,1$	$\approx-0,66<0$
2,4375	2,4375	2,5	$0,0625<0,1$	$\approx-0,22<0$

b. Grâce à cet algorithme, on obtient un encadrement de α : $\boxed{2,4375 < \alpha < 2,5}$

6. $\mathrm{e}^{\frac{t}{39}} + \mathrm{e}^{-\frac{t}{39}} - 4\dfrac{t}{39} - 2 = 0 \iff \mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x} - 4x - 2 = 0$ avec $x = \dfrac{t}{39}$

Cette équation a une unique solution α et $\alpha = \dfrac{t}{39} \iff t = 39\alpha$ donc la largeur de l'arche est $2t = 78\alpha$

$2,4375 < \alpha < 2,5 \iff 190,125 < 78\alpha < 195$

donc la largeur de l'arche est comprise entre 190 et 195 mètres.