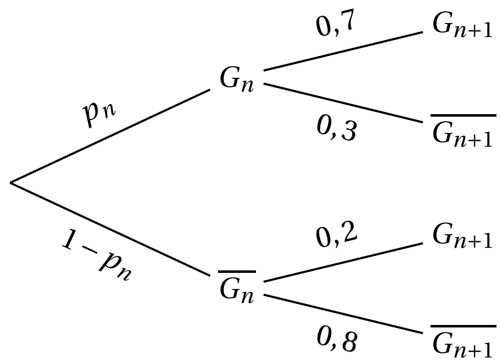
Correction de l'exercice du jour 2 : suites et probabilités

1. a. L'énoncé dit que $p_1 = 0,5$, que $p_{G_1}(G_2) = 0,7$ et que $p_{P_1}(G_2) = 1 - 0,8 = 0,2$.

b. Puisqu'il n'y a pas de match nul, on a $p_n + q_n = 1$ pour tout entier naturel n non nul.

c. On commence par modéliser la situation avec un arbre pondéré :



G_n et $\overline{G_n}$ forment une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
p_{n+1} &= P(G_n \cap G_{n+1}) + P\left(\overline{G_n} \cap G_{n+1}\right)\\
&= p_n \times 0,7 + \left(1 - p_n\right) \times 0,2\\
&= 0,7p_n + 0,2 - 0,2p_n\\
&= 0,5p_n + 0,2
\end{aligned}$$

2. a. Pour tout entier naturel n non nul,

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= p_{n+1} - 0,4\\
&= 0,5p_n + 0,2 - 0,4\\
&= 0,5p_n - 0,2\\
&= 0,5\left(p_n - 0,4\right)\\
&= 0,5v_n
\end{aligned}$$

Cette relation de récurrence montre que la suite (v_n) est la suite géométrique de raison $0,5$ et de premier terme $v_1 = p_1 - 0,4$ soit $v_1 = 0,1$ vu que $p_1 = 0,5$.
Pour tout entier naturel n non nul on a $v_n = v_1 \times 0,5^{n-1}$ soit $v_n = 0,1 \times 0,5^{n-1}$.

b. On en déduit que pour tout entier naturel n non nul, $p_n = 0,4 + 0,1 \times 0,5^{n-1}$.

c. Pour tout entier naturel n non nul :

$$\begin{aligned}
p_{n+1} - p_n &= 0,4 + 0,1 \times 0,5^n - (0,4 + 0,1 \times 0,5^{n-1})\\
&= 0,1 \times 0,5^n - 0,1 \times 0,5^{n-1}\\
&= 0,1 \times 0,5^{n-1}(0,5 - 1)\\
&= 0,1 \times 0,5^{n-1} \times (-0,5)\\
&= -0,1 \times 0,5^n
\end{aligned}$$

Pour tout entier naturel n non nul, $-0,1 < 0$ et $0,5^n > 0$ donc par produit $-0,1 \times 0,5^n < 0$ et par suite $p_{n+1} - p_n < 0$ ce qui démontre que la suite (p_n) est décroissante.

d. $p_n < 0,4001 \iff 0,4 + 0,1 \times 0,5^{n-1} < 0,4001 \iff 0,1 \times 0,5^{n-1} < 0,0001 \iff 0,5^{n-1} < 0,001.$
$\iff \ln\left(0,5^{n-1}\right) < \ln(0,001) \iff (n-1)\ln(0,5) < \ln(0,001) \iff n - 1 > \dfrac{\ln(0,001}{\ln(0,5)} \iff n > 1 + \dfrac{\ln(0,001)}{\ln(0,5)}.$
La plus petite valeur de n recherchée est $n = 11$.

e. $-1 < 0,5 < 1 \Longrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} 0,5^{n-1} = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0,4$.
Cela signifie, qu'à long terme, sur un grand nombre de parties, Pierre gagnera en moyenne 4 parties sur 10.