Correction de l'exercice du jour 3 : géométrie dans l'espace

1. On a : F $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et C $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

2. Le point M est le centre de la face BCGF donc c'est le milieu de [CF] ; il a donc pour coordonnées la demi-somme des coordonnées de C et de F :

M a pour coordonnées $\begin{pmatrix}\frac{x_C+x_F}{2}\\\frac{y_C+y_F}{2}\\\frac{z_C+z_F}{2}\end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix}\frac{0+1}{2}\\\frac{1+1}{2}\\\frac{0+1}{2}\end{pmatrix}$ c'est-à-dire $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

Le point N est le centre de la face EFGH donc c'est le milieu de [FH] ; il a donc pour coordonnées la demi-somme des coordonnées de F et de H :

N a pour coordonnées $\begin{pmatrix}\frac{x_F+x_H}{2}\\\frac{y_F+y_H}{2}\\\frac{z_F+z_H}{2}\end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix}\frac{1+1}{2}\\\frac{1+0}{2}\\\frac{1+0}{2}\end{pmatrix}$ c'est-à-dire $\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

3. **a.** Le plan (HFC) a pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{HF}$ et $\overrightarrow{CF}$ car les points H, F et C ne sont pas alignés.

$\overrightarrow{HF}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1-1\\1-0\\1-0\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{HF}$ $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CF}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1-0\\1-1\\1-0\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{CF}$ $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AG}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1-0\\1-0\\0-1\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AG}$ $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{HF} = 1\times 0+1\times 1+(-1)\times 1 = 0$ donc $\overrightarrow{AG}\perp\overrightarrow{HF}$

$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{CF} = 1\times 1+1\times 0+(-1)\times 1 = 0$ donc $\overrightarrow{AG}\perp\overrightarrow{CF}$

Le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (HFC) donc c'est un vecteur normal à ce plan.

b. Le plan (HFC) passe par le point F et a pour vecteur normal $\overrightarrow{AG}$, c'est donc l'ensemble des points X de coordonnées $(x\ ,\ y\ ,\ z)$ tels que $\overrightarrow{FX}\perp\overrightarrow{AG}$.

$\overrightarrow{FX}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AG}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{FX}\perp\overrightarrow{AG} \iff \overrightarrow{FX}\cdot\overrightarrow{AG}=0 \iff (x-1)\times 1+(y-1)\times 1+(z-1)\times(-1)=0$$
$$\iff x-1+y-1-z+1=0 \iff x+y-z-1=0$$

Le plan (HFC) a donc pour équation cartésienne : $x+y-z-1=0$.

4. La droite (AG) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AG}$ $(1\ ,\ 1\ ,\ -1)$ et passe par le point A de coordonnées $(0\ ,\ 0\ ,\ 1)$; elle a donc pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& x_A+1\times t\\ y &=& y_A+1\times t\\ z &=& z_A+(-1)\times t\end{array}\right.\quad t\in\mathbb{R}\quad\text{soit}\left\{\begin{array}{rcl} x &=& t\\ y &=& t\\ z &=& 1-t\end{array}\right.\quad t\in\mathbb{R}$$

5. Soit R le projeté orthogonal de G sur le plan (HFC). donc R appartient au plan (HFC).

De plus, comme la droite (AG) est orthogonale au plan (HFC), le point R appartient à la droite (AG).

Les coordonnées de R vérifient donc le système : $\left\{\begin{array}{lcr} x & = & t\\ y & = & t\\ z & = & 1-t\\ x+y-z-1 & = & 0\end{array}\right.$

On a donc $t+t-(1-t)-1=0$ donc $3t=2$ donc $t=\dfrac{2}{3}$.

Donc R a pour coordonnées $x_{\text{R}}=t=\dfrac{2}{3}$, $y_{\text{R}}=t=\dfrac{2}{3}$, $z_{\text{R}}=1-t=\dfrac{1}{3}$, soit $\left(\dfrac{2}{3}\ ,\ \dfrac{2}{3}\ ,\ \dfrac{1}{3}\right)$.

6. Une représentation paramétrique de la droite (FG) est : $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1\\ y & = & 1\\ z & = & t\end{array}\right.\quad t\in\mathbb{R}$.

On cherche un point K sur la droite (FG) tel que le triangle KMN soit rectangle en K.
K est un point de (FG) donc ses coordonnées sont de la forme $(1\ ,\ 1\ ,\ t)$.
De plus, le triangle KMN est rectangle en K donc $\overrightarrow{\text{MK}}\perp\overrightarrow{\text{NK}}$ donc $\overrightarrow{\text{MK}}\cdot\overrightarrow{\text{NK}}=0$.

$\overrightarrow{\text{MK}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1-\frac{1}{2}\\ 1-1\\ t-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 0\\ t-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{NK}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1-1\\ 1-\frac{1}{2}\\ t-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{2}\\ t-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{\text{MK}}\cdot\overrightarrow{\text{NK}}=0 \iff \dfrac{1}{2}\times 0+0\times\dfrac{1}{2}+\left(t-\dfrac{1}{2}\right)\times\left(t-\dfrac{1}{2}\right)=0 \iff \left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2=0 \iff t=\dfrac{1}{2}$

Le point K a donc pour coordonnées $\left(1\ ,\ 1\ ,\ \dfrac{1}{2}\right)$.

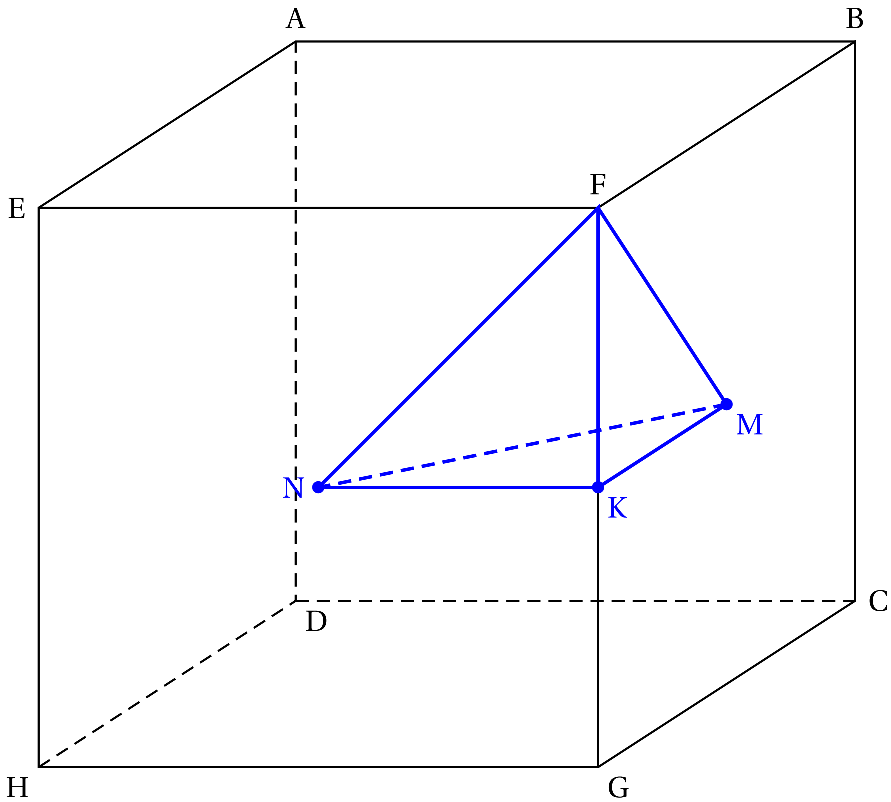
7. Le tétraèdre FNKM a pour hauteur [FK] et pour base le triangle KMN.

- F a pour coordonnées $(1\ ,\ 1\ ,\ 1)$ et K a pour coordonnées $\left(1\ ,\ 1\ ,\ \dfrac{1}{2}\right)$; donc FK $=\dfrac{1}{2}$.
- L'aire du triangle rectangle KMN est $\dfrac{\text{KM}\times\text{KN}}{2}$.
  - M $\left(\dfrac{1}{2}\ ,\ 1\ ,\ \dfrac{1}{2}\right)$ et K $\left(1\ ,\ 1\ ,\ \dfrac{1}{2}\right)$ donc KM $=\dfrac{1}{2}$
  - N $\left(1\ ,\ \dfrac{1}{2}\ ,\ \dfrac{1}{2}\right)$ et K $\left(1\ ,\ 1\ ,\ \dfrac{1}{2}\right)$ donc KN $=\dfrac{1}{2}$

  L'aire du triangle KMN est donc $\dfrac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{2}=\dfrac{1}{8}$.
- Le volume d'un tétraèdre est, en unité de volume : $\dfrac{\text{aire de la base}\times\text{hauteur}}{3}$.

  Le volume du tétraèdre FNKM est donc : $\dfrac{(\text{aire de KMN})\times\text{FK}}{3}=\dfrac{\frac{1}{8}\times\frac{1}{2}}{3}=\dfrac{1}{48}$.

Le volume du cube est 1, celle du tétraèdre FNKM est $\dfrac{1}{48}$ donc le volume du tétraèdre représente un quarante-huitième du volume du cube.


A
B
E
F
M
N
K
C
D
H
G