Correction de l'exercice du jour 4 : exp *et intégrale*

Partie A

1. **a.** On lit $f(0) = -2$.

   b. Le nombre dérivé en $x = 0$ est égal au coefficient directeur de la droite (AB) :
   $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{-4-(-2)}{2-0} = -1$.

2. **a.** f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a :

$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & 1e^{bx} + (x+a) \times be^{bx} \\ & = & f'(x) = (bx+ab+1)e^{bx} \end{array}$$

   b. On a donc :
   $\left\{\begin{array}{rcl} f(0) & = & -2 \\ f'(0) & = & -1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} ae^0 & = & -2 \\ (1+ab)e^0 & = & -1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & -2 \\ 1+ab & = & -1 \end{array}\right.$
   $\iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & -2 \\ 1-2b & = & -1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & -2 \\ 2 & = & 2b \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & -2 \\ 1 & = & b \end{array}\right.$
   On en déduit que : $f(x) = (x-2)e^x$.

Partie B

1. On a déjà vu que :

$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & e^{bx}(1+bx+ab) \\ & = & e^x(1+x-2) \\ & = & (x-1)e^x \end{array}$$

   $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ quel que soit le réel x, le signe de $f'(x)$ est celui de $x-1$.
   - si $x < 1$, $x - 1 < 0$, donc f est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 1]$;
   - si $x > 1$, $x - 1 > 0$, donc f est croissante sur $]1\ ;\ +\infty]$
   - si $x = 1$, $f'(1) = 0$: la tangente au point d'abscisse 1 à la courbe $\mathscr{C}$ est horizontale. Ceci correspond bien à la représentation graphique donnée.

2. **a.** $\lim\limits_{x\to+\infty} x-2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, donc par produit de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

   b. On a une forme indéterminée du type « $\infty \times 0$ », on change donc d'écriture .
   Pour tout réel x on a $f(x) = xe^x - 2e^x$.
   On a $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ (limite de cours) et $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$, donc par somme de limites :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

   Ce résultat montre géométriquement que l'axe des abscisses est asymptote horizontale à $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$.

3. f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$\begin{array}{rcl} f''(x) & = & 1e^x + (x-1)e^x \\ & = & xe^x \end{array}$$

Pour tout réel x on a $e^x > 0$ donc $f''(x)$ est su signe de x.

- si $x < 0$, $f''(x) < 0$, donc f est concave sur $-\infty$; 0[;
- si $x > 0$, $f''(x) > 0$, donc f est convexe sur]ř ; $+\infty$]
- si $x = 0$, $f''(x) = 0$
- f change de convexité au point d'abscisse 0 qui est le point A donc le point A est l'unique point d'inflexion de $\mathscr{C}$.

4. **a.** On pose $u(x) = x - 2$ et $v'(x) = e^x$ et on a $u'(x) = 1$ et $v(x) = e^x$ par exemple avec u et v sont dérivables sur $[2;3]$ à dérivées continues, donc on peut effectuer une intégration par parties.

$$\begin{aligned}
\int_2^3 f(x)\,dx &= \left[(x-2)e^x\right]_2^3 - \int_2^3 e^x\,dx && (1)\\
&= \left[(x-2)e^x\right]_2^3 - \left[e^x\right]_2^3 && (2)\\
&= e^3 - (e^3 - e^2) && (3)\\
&= e^2 && (4)
\end{aligned}$$

b. $\forall x \in [2 ; 3]$ on a $x - 2 \geqslant 0$ et $e^x > 0$ donc par produit $(x-2)e^x \geqslant 0$ ce qui prouve que f est positive sur $[2 ; 3]$.

c. f est positive sur $[2 ; 3]$ donc l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 2$ et $x = 3$ est égale à l'intégrale calculée précédemment soit e^2 en unité d'aire.