Partie 1. Équation différentielle

1. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a $g'(x) = \mathrm{e}^x - 1 - 2\mathrm{e}^{-x}$ et :

$$\begin{aligned} g'(x) + g(x) &= \mathrm{e}^x - 1 - 2\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^x - x + 2\mathrm{e}^{-x} \\ &= 2\mathrm{e}^x - x - 1 \end{aligned}$$

On en déduit donc que la fonction g définie est une solution de (E).

2. $E_0 \iff y' = -y$: les solutions de E_0 sont les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et définies par : $x \longmapsto C\mathrm{e}^{-x}$ où $C \in \mathbb{R}$.

3. On en déduit que toutes les solutions de (E) sont les fonctions dérivables et définies par :

$$x \longmapsto C\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^x - x + 2\mathrm{e}^{-x} \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

Partie 2. Étude de la fonction g

1. Calcul des limites de g en :

a. $-\infty$.
On a $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} -x = +\infty$ et $\lim\limits_{T \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$: on en déduit par composition des limites $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$ d'où par somme des limites :

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$$

b. $+\infty$.
On change d'écriture : pour $x \neq 0$: $\mathrm{e}^x - x = x\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} - 1\right)$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ (limite de cours).
Par produit des limites $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} - 1\right) = +\infty$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} -x = -\infty$ et $\lim\limits_{T \to -\infty} \mathrm{e}^T = 0$: on en déduit par composition des limites $\lim\limits_{x \to -+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$ d'où par somme des limites :

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$$

2. Pour tout réel x,

$$\begin{aligned} (\mathrm{e}^x - 2)(\mathrm{e}^x + 1) &= \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^x - 2 \\ &= \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x - 2 \end{aligned}$$

3. On a déjà vu que $g'(x) = \mathrm{e}^x - 1 - 2\mathrm{e}^{-x}$.
On met e^{-x} en facteur, il vient :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \mathrm{e}^x - 1 - 2\mathrm{e}^{-x} \\ &= \mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x - 2\right) \\ &= \mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^x - 2)(\mathrm{e}^x + 1) \end{aligned}$$

4. Pour tout réel x on a : $\mathrm{e}^{-x} > 0$ et $\mathrm{e}^{x} + 1 > 0$ donc $g'(x)$ a le même signe que $\mathrm{e}^{x} - 2$ sur $\mathbb{R}$.

— Or $\mathrm{e}^{x} - 2 > 0 \iff \mathrm{e}^{x} > 2 \iff x > \ln 2$ (la fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$ donc l'ordre est conservé).

— De même $\mathrm{e}^{x} - 2 < 0 \iff x < \ln 2$.

— Et $\mathrm{e}^{x} - 2 = 0 \iff x = \ln 2$.

On en déduit le tableau de signes de $g'(x)$ et de variations de g sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de g	$+\infty$	$\searrow$	$3 - \ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

$g(\ln 2) = \mathrm{e}^{\ln 2} - \ln 2 + 2\mathrm{e}^{-\ln 2} = 3 - \ln 2$.