$$\text{A}(0\,;4\,;16),\quad \text{B}(0\ ;\ 4\ ;\ -10),\quad \text{C}(4\ ;\ -8\ ;\ 0)\quad \text{et}\quad \text{K}(0\,;4\,;3).$$

1. **a.** On a $\text{CK}^2 = (4-0)^2 + (-8-4)^2 + (0-3)^2 = 16+144+9 = 169 = 13^2$, donc

   $\text{CK} = 13 \iff \text{C} \in \mathcal{S}$.

   b. Calculons les coordonnées de $\overrightarrow{\text{AC}}\begin{pmatrix}4\\-12\\-16\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\text{BC}}\begin{pmatrix}4\\-12\\10\end{pmatrix}$

   D'où le produit scalaire : $\overrightarrow{\text{AC}} \cdot \overrightarrow{\text{BC}} = 16+144-160 = 160-160 = 0$: les vecteurs sont orthogonaux, les droites (AC) et (BC) sont perpendiculaires en C, donc le triangle ABC est rectangle en C.

2. **a.** • $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\text{AC}} = 12-12+0 = 0$: $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{\text{AC}}$;

   • $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\text{BC}} = 12-12+0 = 0$: $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{\text{BC}}$.

   Les vecteurs $\overrightarrow{\text{AC}}$ et $\overrightarrow{\text{BC}}$ ne sont pas colinéaires (leurs coordonnées sont égales mais pas les dernières), donc $\overrightarrow{n}$ normal deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) est normal à ce plan.

   b. On sait qu'alors les coordonnées de $\overrightarrow{n}$ sont les coefficients de x, y et z dans l'équation du plan (ABC).

   On a donc $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (\text{ABC}) \iff 3x+y+d = 0$, avec $d \in \mathbb{R}$.

   Or par exemple :

   $\text{C}(4\ ;\ -8\ ;\ 0) \in (\text{ABC}) \iff 3\times 4 + (-8) + d = 0 \iff 12-8+d = 0 \iff d = -4$.

   Finalement $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (\text{ABC}) \iff 3x+y-4 = 0$.

3. **a.** Si D appartient à l'axe des abscisses son ordonnée et sa cote sont nuls, donc D a pour coordonnées $(x\ ;\ 0\ ;\ ;0)$.

   De plus $\text{KD} = 13 \Rightarrow \text{KD}^2 = 13^2 = 169 = (x-0)^2 + (0-4)^2 + (0-3)^2 \iff (x-0)^2 + 16 + 9 = 169 \iff x^2 = 144 \iff x^2 = 12^2 \iff x^2 - 12^2 = 0 \iff (x+12)(x-12) = 0 \left\{\begin{array}{rcl} x+12 & = & 0 \\ x-12 & = & 0\end{array}\right. \iff$

   $\left\{\begin{array}{rcl} x+12 & = & 0 \\ x-12 & = & 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -12 \\ x & = & 12\end{array}\right.$

   Conclusion $\text{D}(12\,;0\,;0)$.

   b. Si la droite Δ est perpendiculaire au plan (ABC) un de ses vecteurs directeurs est le vecteur $\overrightarrow{n}$ normal à ce plan. On a donc :

   $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in \Delta \iff \overrightarrow{\text{D}M} = t\overrightarrow{n}$, avec $t \in \mathbb{R}$. Cette égalité se traduit par le système :

   $$\left\{\begin{array}{rcl} x-12 & = & 3t \\ y-0 & = & 1t \\ z-0 & = & 0t\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcr} x & = & 12+3t \\ y & = & t \\ z & = & 0t\end{array}\right..$$

   c. D appartient à Δ perpendiculaire au plan (ABC) ; cherchons les coordonnées du projeté orthogonal de D sur le plan (ABC) : I

   I appartient au plan (ABC) et appartient à Δ, ses coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ vérifient donc l'équation du plan (ABC) et les équations paramétriques de Δ soit le système :

   $$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 12+3t \\ y & = & t \\ z & = & 0t \\ 3x+y-4 & = & 0\end{array}\right.$$

En remplaçant dans la dernière équation x et y par leurs valeurs en fonction de t on obtient $3(12+3t)+t-4=0 \iff 36+9t+t-4=0 \iff 10t+32=0$
$\iff 10t=-32 \iff t=-\dfrac{32}{10}=-\dfrac{16}{5}$.

En reportant cette valeur dans les deux premières équations de Δ, on obtient :
$x=12-3\times\dfrac{16}{5}=\dfrac{60}{5}-\dfrac{48}{5}=\dfrac{12}{5}$; $y=-\dfrac{16}{5}$ et $z=0$.
$\text{I}\left(\dfrac{12}{5}\,;\,-\dfrac{16}{5}\,;0\right)$.

On calcule $\text{DI}^2=\left(\dfrac{12}{5}-12\right)^2+\left(-\dfrac{16}{5}-0\right)^2+0^2=\left(-\dfrac{48}{5}\right)^2+\left(-\dfrac{16}{5}\right)^2=\dfrac{2304}{25}+\dfrac{256}{25}=\dfrac{2560}{25}=\dfrac{256\times10}{25}$.

Finalement $\text{DI}=\sqrt{\dfrac{256\times10}{25}}=\dfrac{16\sqrt{10}}{5}$.

4. En prenant la base (ABC) rectangle en C : son aire est donc égale à : $\dfrac{\text{AC}\times\text{BC}}{2}$.

$\text{AC}^2=16+144+256=416$; $\text{AC}=\sqrt{416}$;
$\text{BC}^2=16+144+100=260$; $\text{BC}=\sqrt{260}$.
Donc $\mathscr{A}(\text{ABC})=\dfrac{\sqrt{416}\times\sqrt{260}}{2}=52\sqrt{10}$
Donc avec $h=\dfrac{16\sqrt{10}}{5}$, on obtient :
$V=\dfrac{1}{3}\times52\sqrt{10}\times\dfrac{16\sqrt{10}}{5}=\dfrac{1664}{3}\approx554,7$ soit 555 à l'unité près.