1. — **Limites.** On a $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} -\dfrac{2}{x} = -\infty$, d'où par somme des limites $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$.
   De même $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} -\dfrac{2}{x} = 0$, d'où par somme des limites $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = +\infty$.
   — **Variations.** g est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et pour tout réel x de cet intervalle on a $g'(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2}$ somme de deux termes positifs. La dérivée est positive : la fonction g est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.
   — **Annulation.** La fonction g est continue, car dérivable sur $[2,3\,;\,2,4]$, g est strictement croissante sur cet intervalle; la calculatrice donne $g(2,3) \approx -0,04$ et

   $g(2,4) \approx 0,04$ donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires dans le cas des fonctions strictement croissante, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution x_0 dans l'intervalle $[2,3\,;\,2,4]$.

2. **a.** On a donc $g(x_0) = \ln x_0 - \dfrac{2}{x_0} = 0 \iff \ln x_0 = \dfrac{2}{x_0}$.

   D'autre part $f(x_0) = \dfrac{5\ln x_0}{x_0}$ donc $f(x_0) = \dfrac{5 \times \dfrac{2}{x_0}}{x_0}$ soit $f(x_0) = \dfrac{10}{x_0^2}$.

   b. Soit $\mathscr{A}(a) = \displaystyle\int_1^a \dfrac{5\ln t}{t}\,\mathrm{d}t = 5\int_1^a \dfrac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$.

   $t \longmapsto \dfrac{\ln t}{t}$ est de la forme $u' \times u$ qui a pour primitive $\dfrac{u^2}{2}$ avec $u(t) = \ln t$.
   On en déduit que $\mathscr{A}(a) = \dfrac{5}{2}(\ln a)^2$.

3. D'après la question 1, P_0 a pour abscisse x_0, donc d'après la question 2. M_0 a pour coordonnées $\left(x_0\,;\,\dfrac{10}{x_0^2}\right)$ et enfin $H_0\left(0\,;\,\dfrac{10}{x_0^2}\right)$.
   D'où :

$$\begin{array}{rcl}\mathscr{A}(\mathscr{D}_1) & = & \displaystyle\int_1^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t \\ & = & \dfrac{5}{2}(\ln x_0)^2 \\ & = & \dfrac{5}{2}\left(\dfrac{4}{x_0^2}\right) \\ & = & \dfrac{10}{x_0^2} \\ & = & f(x_0) \\ & = & \mathscr{A}(\mathscr{D}_2\end{array}$$

   En partant de l'encadrement donné :

$$2,3 < x_0 < 2,4$$

$$\Longrightarrow 2,3^2 < x_0^2 < 2,4^2$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2,4^2} < \frac{1}{x_0^2} < \frac{1}{2,3^2}$$

$$\Longrightarrow 10 \times \frac{1}{2,4^2} < 10 \times \frac{1}{x_0^2} < 10 \times \frac{1}{2,3^2}$$

Soit finalement : $1,736 < \dfrac{10}{x_0^2} < 1,891$.

Conclusion : $1,7 < \mathscr{A}(\mathscr{D}_1) < 1,9$ à $0,2$ près.