Correction de l'exercice du jour 9

Partie A

Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1+2\ln x}{x^2}.$$

Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f et soit $(\mathscr{C}')$ celle de la fonction h définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $h(x) = \dfrac{1}{x}$.

1. Calculons les limites de f en 0 et en $+\infty$:

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 1+2\ln(x) = -\infty \\ \displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^2 = 0 \quad \text{avec} \quad x^2 > 0 \end{array}\right\} \overset{\text{par quotient des limites}}{\Longrightarrow} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty.$$

Pour tout réel $x > 0$ on a $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{x} \times \dfrac{\ln x}{x}$.

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0 \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{d'après le cours} \end{array}\right\} \overset{\text{par somme et produit des limites}}{\Longrightarrow} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

- $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$ donc la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à $(\mathscr{C})$.
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à $(\mathscr{C})$ au voisinage de $+\infty$.

2. Pour tout réel $x > 0$ on a $f'(x) = \dfrac{\frac{2}{x} \times x^2 - (1+2\ln x) \times 2x}{x^4}$ soit $f'(x) = \dfrac{-4\ln x}{x^3}$.

Or $x^3 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-4\ln x$. Or $-4\ln x \geqslant 0 \Longleftrightarrow \ln x \leqslant 0 \Leftrightarrow 0 < x \leqslant 1$. On en déduit le tableau de signes de $f'(x)$ et de variation de f avec $f(1) = 1$:

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
Variations de f	‖ $-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

3. Soit I le point d'intersection de $(\mathscr{C})$ avec l'axe des abscisses. On résout l'équation $f(x) = 0$.

Or $f(x) = 0 \Longleftrightarrow \dfrac{1+2\ln x}{x^2} = 0 \Longleftrightarrow 1 + 2\ln x = 0 \Longleftrightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \Longleftrightarrow x = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$ donc le point I a pour coordonnées $\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\ ;\ 0\right)$.

4. Pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$, on pose $g(x) = 1 - x + 2\ln x$.

a. Pour tout réel $x > 0$ on a $g'(x) = -1 + \dfrac{2}{x}$ donc $g'(x) = \dfrac{-x+2}{x}$.
Or $x > 0$ donc $g'(x)$ a le même signe que $2 - x$ sur $]0\,;\,+\infty[$. $2 - x$ est une expression affine dont la valeur charnière est $x = 2$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 1 - x = 1\\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 2\ln x = -\infty\end{array}\right\} \overset{\text{par somme des limites}}{\Longrightarrow} \quad \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = -\infty.$$

On peut donc faire le tableau de variations de g sur $]0\,;\,+\infty[$ avec le fait que $g(2) = -1 + 2\ln 2$:

x	0		2		$+\infty$
Signe de $g'(x)$	||	$+$	0	$-$	
Variations de g	|| $-\infty$	$\nearrow$	$1+2\ln 2$	$\searrow$	

b. Je ne la corrige que sur $]0\,;\,2[$. La fonction g y est continue, strictement croissante. $0 \in]-\infty\,;\,1 + 2\ln 2[$ intervalle image de $]0\,;\,2[$ par la fonction g donc l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique β dans l'intervalle $]0\,;\,2[$.
Sur $]2\,;\,4[$ faire de même et on trouve $\alpha \simeq 1.22$.

5. a. Pour tout réel $x > 0$, on a $f(x) - \dfrac{1}{x} = \dfrac{1+2\ln x}{x^2} - \dfrac{1}{x}$ donc $f(x) - \dfrac{1}{x} = \dfrac{1+2\ln x - x}{x^2}$ soit $f(x) - \dfrac{1}{x} = \dfrac{g(x)}{x^2}$.
Or l'équation $g(x) = 0$ a deux solutions qui sont α et β donc l'équation $f(x) - \dfrac{1}{x} = 0$ a ses deux mêmes solutions α et β ce qui prouve que $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ se coupent en deux points d'abscisse α et β.

b. D'après le tableau de variation de f, on constate que f est strictement positive sur $[1\,;\,+\infty[$ donc si $x > 4$ on a $f(x) < 0$. De plus, d'après la question précédente g est strictement négative à partir de 4, on en déduit donc que $f(x) - \dfrac{1}{x} < 0$ soit $f(x) < \dfrac{1}{x}$ ce qui prouve donc finalement que pour tout réel x supérieur ou égal à 4,

$$0 < f(x) \leqslant \frac{1}{x}.$$

Partie B

1. a. Facile pour tout réel $x > 0$ on a $F'(x) = f(x)$ ce qui montre que F est une primitive de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

b. $\mathscr{A}(\alpha) = \displaystyle\int_1^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x$. Or F est une primitive de f sur $]0\,;\,+\infty[$ donc $\mathscr{A}(\alpha) = \left[\dfrac{-2\ln x - 3}{x}\right]_1^{\alpha}$.

Ainsi $\mathscr{A}(\alpha) = \dfrac{-2\ln(\alpha) - 3}{\alpha} + 3$. Or α est solution de l'équation $g(x) = 0$ donc $1 - \alpha + 2\ln\alpha = 0$ soit $-2\ln\alpha = 1 - \alpha$ donc

$$\mathscr{A}(\alpha) = \frac{1 - \alpha - 3}{\alpha} + 3 \text{ c'est-à-dire } \mathscr{A}(\alpha) = \frac{-2}{\alpha} + 2.$$

2. Soit la suite (I_n) définie pour n supérieur ou égal à 1 par :

$$I_n = \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

a. On utilise pour tout n supérieur ou égal à 4, la double inégalité : $0 < f(x) < \dfrac{1}{x}$. Comme l'intégrale conserve l'ordre dans $\mathbb{R}$ on en déduit que :

$0 < \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x < \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ soit $0 < \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x < [\ln x]_n^{n+1}$

ou encore $0 < \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x < \ln(n+1) - \ln(n)$ donc $0 < \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x < \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

b. Pour tout entier n supérieur ou égal à 4 on a $\dfrac{n+1}{n} = 1 + \dfrac{1}{n}$.

Or $\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1 \\ \displaystyle\lim_{N\to 1} \ln(N) = 0\end{array}\right\} \overset{\text{par composition des limites}}{\Longrightarrow} \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = 0$. On en déduit, par le théorème d'encadrement des limites, que la suite (I_n) converge vers 0.

c. Soit $S_n = \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 + \mathrm{I}_3 + \cdots + I_n$ donc $S_n = \displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_3^4 f(x)\,\mathrm{d}x + \cdots + \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$

c'est-à-dire grâce à la relation de Chasles : $S_n = \displaystyle\int_1^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

$$S_n = \left[\frac{-2\ln x - 3}{x}\right]_1^{n+1} \text{ soit } S_n = \frac{-2\ln(n+1) - 3}{n+1} + 3.$$

$S_n = -2 \times \dfrac{\ln(n+1)}{n+1} - \dfrac{3}{n+1} + 3$.

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{-3}{n+1} + 3 = 3$. Posons $N = n+1$. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n + 1 = +\infty$.

Ainsi $\dfrac{\ln(n+1)}{n+1} = \dfrac{\ln(N)}{N}$. Or $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \frac{\ln(N)}{N} = 0$ d'après le cours donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1} = 0$ et par somme des limites $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = 3$.