

Exercice 1

Partie A

1. Tout d'abord, on a $f(x) = 2x - 2x^2$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle $f'(x) = 2 - 4x$.

On étudie le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Calcul de la racine : $2 - 4x = 0 \iff x = \frac{1}{2}$. On en déduit le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
signe de $f'(x)$	+ 0 -		

On se restreint à l'intervalle $\left[0; \frac{1}{2}\right]$:

x	0	$\frac{1}{2}$
signe de $f'(x)$	+	
variations de f	0  $\frac{1}{2}$	

$$f(0) = 0 \text{ et } f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

La fonction f est bien strictement croissante sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.

2. On admet que pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$.

- $u_1 = 2u_0(1 - u_0) = 2 \times 0,3 \times 0,7 = 0,42$.

- Soit $\mathcal{P}_n : u_n \leq u_{n+1}$.

— *Initialisation.* On a $u_0 \leq u_1$ car $0,3 \leq 0,42$.

— *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}_n$ (i.e. $u_n \leq u_{n+1}$) et montrons $\mathcal{P}_{n+1}$.

Par hypothèse de récurrence, $u_n \leq u_{n+1}$.

f étant strictement croissante sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$, f conserve l'ordre sur cet intervalle.

Comme on admet que $u_n, u_{n+1} \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$, on a par croissance de f :

$$f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f\left(\frac{1}{2}\right)$$

soit $u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \frac{1}{2}$, d'où $\mathcal{P}_{n+1}$.

— *Conclusion.* D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$.

3. Cet encadrement montre que :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$: la suite (u_n) est croissante;
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \frac{1}{2}$: la suite (u_n) est majorée par $\frac{1}{2}$.

Conclusion : La suite (u_n) est croissante et majorée, donc elle converge vers une limite ℓ telle que $\ell \leq \frac{1}{2}$.

Partie B

1. (a) La relation de récurrence s'écrit alors $P_{n+1} - P_n = P_n(1 - 0 \times P_n)$, soit

$$P_{n+1} - P_n = P_n \iff P_{n+1} = 2P_n$$

Cette égalité montre que la suite (P_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $P_0 = 3$.

(b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n = P_0 \times q^n$ donc $P_n = 3 \times 2^n$.

Comme $2 > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$, et comme $3 > 0$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = +\infty$, ce qui est irréaliste pour une population sur le long terme.

2. (a) On a $v_0 = 0,1 \times P_0 = 0,1 \times 3 = 0,3$.

La relation de récurrence devient :

$$P_{n+1} - P_n = P_n(1 - 0,2P_n) \iff P_{n+1} - P_n = P_n - 0,2P_n^2$$

d'où $P_{n+1} = 2P_n - 0,2P_n^2$.

Or $v_{n+1} = 0,1P_{n+1}$, donc :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 0,1(2P_n - 0,2P_n^2) \\ &= 0,2P_n - 0,02P_n^2 \end{aligned}$$

Comme $v_n = 0,1P_n \iff P_n = 10v_n$, on obtient :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 0,2(10v_n) - 0,02(10v_n)^2 \\ &= 2v_n - 0,02(100v_n^2) \\ &= 2v_n - 2v_n^2 \\ &= 2v_n(1 - v_n) \end{aligned}$$

(b) La relation de la question précédente montre que la suite (v_n) est la suite (u_n) de la **Partie A**. On a vu que cette suite converge vers $\frac{1}{2}$.

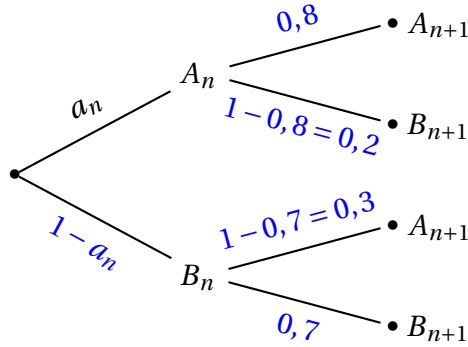
On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{1}{2}$.

Or $P_n = 10v_n$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = 10 \times \frac{1}{2} = 5$.

Finalement, la population se stabilisera autour de 5000 individus.

Exercice 2

1. (a) L'arbre pondéré est donné ci-dessous :



- (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A_n et B_n forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}(A_{n+1}) &= \mathbf{P}(A_n \cap A_{n+1}) + \mathbf{P}(B_n \cap A_{n+1}) \\
 &= \mathbf{P}(A_n) \times \mathbf{P}_{A_n}(A_{n+1}) + \mathbf{P}(B_n) \times \mathbf{P}_{B_n}(A_{n+1}) \\
 &= 0,8a_n + 0,3(1-a_n) \\
 a_{n+1} &= 0,5a_n + 0,3
 \end{aligned}$$

2. Étude d'un cas particulier.

- (a) Soit $\mathcal{P}_n : 0 \leq a_n \leq 0,6$:

- Initialisation : $a_1 = a = 0,5$ donc $0 \leq a_1 \leq 0,6$.

- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Supposons $\mathcal{P}_n$ (i.e. $0 \leq a_n \leq 0,6$) et démontrons $\mathcal{P}_{n+1}$ (i.e. $0 \leq a_{n+1} \leq 0,6$).

Par hypothèse de récurrence, $0 \leq a_n \leq 0,6$.

Alors : $0 \leq 0,5 \times a_n \leq 0,5 \times 0,6 \Rightarrow 0 \leq 0,5a_n \leq 0,3$.

En ajoutant 0,3 à chaque membre :

$$0,3 \leq 0,5a_n + 0,3 \leq 0,6$$

Comme $0 \leq 0,3$, on a bien $0 \leq a_{n+1} \leq 0,6$, d'où $\mathcal{P}_{n+1}$.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq a_n \leq 0,6$.

- (b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
 a_{n+1} - a_n &= 0,5a_n + 0,3 - a_n \\
 &= -0,5a_n + 0,3
 \end{aligned}$$

Or, d'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}
 0 \leq a_n \leq 0,6 &\Rightarrow 0 \leq 0,5a_n \leq 0,3 \\
 &\Rightarrow -0,3 \leq -0,5a_n \leq 0 \\
 &\Rightarrow 0 \leq -0,5a_n + 0,3 \leq 0,3 \\
 &\Rightarrow a_{n+1} - a_n \geq 0
 \end{aligned}$$

On en déduit que la suite (a_n) est croissante.

3. *Étude du cas général.*

(a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}u_{n+1} &= a_{n+1} - 0,6 \\&= 0,5a_n + 0,3 - 0,6 \\&= 0,5a_n - 0,3 \\&= 0,5(a_n - 0,6) \\&= 0,5u_n\end{aligned}$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc géométrique de raison $q = 0,5$ et de premier terme $u_1 = a_1 - 0,6 = a - 0,6$.

(b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = u_1 q^{n-1} = (a - 0,6) \times 0,5^{n-1}$.

Or $u_n = a_n - 0,6 \iff a_n = u_n + 0,6$, soit $a_n = (a - 0,6) \times 0,5^{n-1} + 0,6$.

Exercice 3

1. On reconnaît une forme indéterminée du type « $\infty - \infty$ » donc on change d'écriture.

Soit $n > 0$:

$$n - \sqrt{n} = n \left(1 - \frac{\sqrt{n}}{n} \right) = n \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par produit des limites} \\ \Rightarrow \end{array} \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = +\infty.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n - \sqrt{n} = +\infty$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1 \iff 0 \leqslant 1 + (-1)^n \leqslant 2$$

Comme $\sqrt{n} > 0$, on a par division :

$$0 \leqslant \frac{1 + (-1)^n}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{2}{\sqrt{n}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{d'après le théorème des gendarmes} \\ \Rightarrow \end{array} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + (-1)^n}{\sqrt{n}} = 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + (-1)^n}{\sqrt{n}} = 0$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\cos(n^2) \leqslant 1 \iff -2 \cos(n^2) \geqslant -2 \iff n^3 - 2 \cos(n^2) \geqslant n^3 - 2$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 - 2 = +\infty \\ n^3 - 2 \cos(n^2) \geqslant n^3 - 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par comparaison} \\ \Rightarrow \end{array} \lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 - 2 \cos(n^2) = +\infty.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 - 2 \cos(n^2) = +\infty$$

4. On reconnaît une forme indéterminée du type « $\frac{\infty}{\infty}$ » donc on change d'écriture.

Soit $n > 0$:

$$\frac{5n^2}{n^2 + 6n + 3} = \frac{5n^2}{n^2 \left(1 + \frac{6}{n} + \frac{3}{n^2} \right)} = \frac{5}{1 + \frac{6}{n} + \frac{3}{n^2}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} 5 = 5 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{6}{n} + \frac{3}{n^2} = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par quotient des limites} \\ \Rightarrow \end{array} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{1 + \frac{6}{n} + \frac{3}{n^2}} = 5.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n^2}{n^2 + 6n + 3} = 5$$

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sin(n^2) \leq 1 \iff 4 \sin(n^2) \leq 4 \iff 4 \sin(n^2) - n \leq 4 - n$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} 4 - n = -\infty \\ 4 \sin(n^2) - n \leq 4 - n \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par comparaison} \\ \Rightarrow \end{array} \lim_{n \rightarrow +\infty} 4 \sin(n^2) - n = -\infty.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 4 \sin(n^2) - n = -\infty$$

6. On reconnaît une forme indéterminée du type « $\frac{\infty}{\infty}$ » donc on change d'écriture.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \frac{3^n}{3^n + 1} &= \frac{3^n \times 1}{3^n \left(1 + \frac{1}{3^n}\right)} \\ &= \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n} \end{aligned}$$

$$-1 < \frac{1}{3} < 1 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n = 1.$$

Par quotient des limites, on en déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n}{3^n + 1} = 1$$

7. On reconnaît une forme indéterminée du type « $\infty - \infty$ » donc on change d'écriture.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$4^n - 5^n = 5^n \left(\frac{4^n}{5^n} - 1 \right) = 5^n \left(\left(\frac{4}{5} \right)^n - 1 \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} 5 > 1 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} 5^n = +\infty \\ -1 < \frac{4}{5} < 1 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{5} \right)^n = 0 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{5} \right)^n - 1 = -1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par produit des limites} \\ \Rightarrow \end{array} \lim_{n \rightarrow +\infty} 5^n \left(\left(\frac{4}{5} \right)^n - 1 \right) = -\infty.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 4^n - 5^n = -\infty$$

-
8. On reconnaît une forme indéterminée du type « $\infty - \infty$ » donc on utilise l'expression conjuguée.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\sqrt{n+1} - \sqrt{n} &= \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+1} = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty \end{array} \right\} \text{par somme} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+1} + \sqrt{n} = +\infty.$$

Par quotient des limites, on en déduit que :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 0}$$

Exercice 4

1. (a) $u_1 = 5u_0 - 4 \times 0 - 3$ donc $u_1 = 5 \times 3 - 0 - 3 = 12$.
(b) De même, $u_2 = 5u_1 - 4 \times 1 - 3$ donc $u_2 = 5 \times 12 - 4 - 3 = 53$.
(c) Il semble que la suite (u_n) soit croissante et qu'elle ait pour limite $+\infty$.
2. (a) Soit $P_n : \ll u_n \geq n+1 \gg$.

Initialisation. Pour $n = 0$, on a $u_0 = 3$ et $0+1 = 1$. Comme $3 \geq 1$, P_0 est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose P_n vraie (i.e. $u_n \geq n+1$) et démontrons P_{n+1} (i.e. $u_{n+1} \geq n+2$).

Par hypothèse de récurrence, on a $u_n \geq n+1$, donc :

$$\begin{aligned} u_n \geq n+1 &\implies 5u_n \geq 5(n+1) \\ &\implies 5u_n - 4n - 3 \geq 5n + 5 - 4n - 3 \\ &\implies u_{n+1} \geq n+2 \end{aligned}$$

D'où P_{n+1} .

Conclusion : d'après le principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq n+1$$

- (b) On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) = +\infty$.

D'après le théorème de comparaison des limites :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

3. (a) $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - (n+1) - 1 \\ &= 5u_n - 4n - 3 - n - 2 \\ &= 5u_n - 5n - 5 \\ &= 5(u_n - n - 1) \\ &= 5v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc la suite géométrique de raison $q = 5$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 0 - 1 = 2$.

- (b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n$ donc $v_n = 2 \times 5^n$.
(c) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - n - 1 \iff u_n = v_n + n + 1$.

$$u_n = 2 \times 5^n + n + 1$$

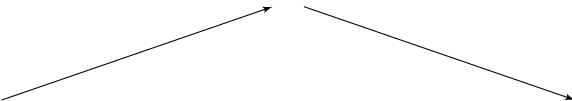
- (d) $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 2 \times 5^{n+1} + n + 2 - (2 \times 5^n + n + 1) \\ &= 2 \times 5 \times 5^n - 2 \times 5^n + 1 \\ &= 2 \times 5^n (5 - 1) + 1 \\ &= 8 \times 5^n + 1 \end{aligned}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $8 \times 5^n + 1 > 0$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$, la suite (u_n) est donc strictement croissante.

Exercice 5

1. On commence par établir le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
Variations de f			

On doit avoir f' positive sur $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$ et négative sur $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$ donc on peut éliminer $\mathcal{C}_1$.

Utilisons la convexité de f : f semble convexe sur $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$ et concave sur $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$: f' doit alors être croissante sur $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$: la seule possibilité est $\mathcal{C}_2$.

2. (a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R},$$

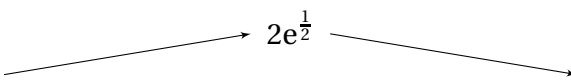
$$\begin{aligned} f'(x) &= -2e^x + (3-2x)e^x \\ &= (-2+3-2x)e^x \\ &= (1-2x)e^x \end{aligned}$$

- (b) On étudie le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$ donc $f'(x)$ a le même signe que $1-2x$.

Calcul de la racine : $1-2x=0 \iff x=\frac{1}{2}$.

On en déduit le signe de $f'(x)$ et les variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
signe de $f'(x)$	+	0	-
variations de f			

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2e^{\frac{1}{2}}.$$

- (c) $(T_0) : y = f'(0)(x-0) + f(0)$ donc $(T_0) : y = x+3$ vu que $f'(0) = 1$ et $f(0) = 3$.

3. (a) Pour étudier la convexité de f , on étudie le signe de $f''(x)$.

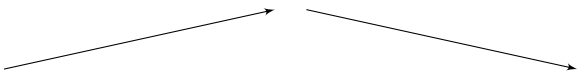
f' est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R},$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= -2e^x + (1-2x)e^x \\ &= (-2+1-2x)e^x \\ &= (-2x-1)e^x \end{aligned}$$

$\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $-2x-1$.

On peut dresser le tableau de signes de $f''(x)$ et de variations de f' sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
signe de $f''(x)$	+	0	-
variations de f'			

— f est convexe sur $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$.

— f est concave sur $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

(b) f change de convexité au point d'abscisse $-\frac{1}{2}$: le point $A\left(-\frac{1}{2}; f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$, soit $A\left(-\frac{1}{2}; 4e^{-\frac{1}{2}}\right)$, est le seul point d'inflexion de $\mathcal{C}$.