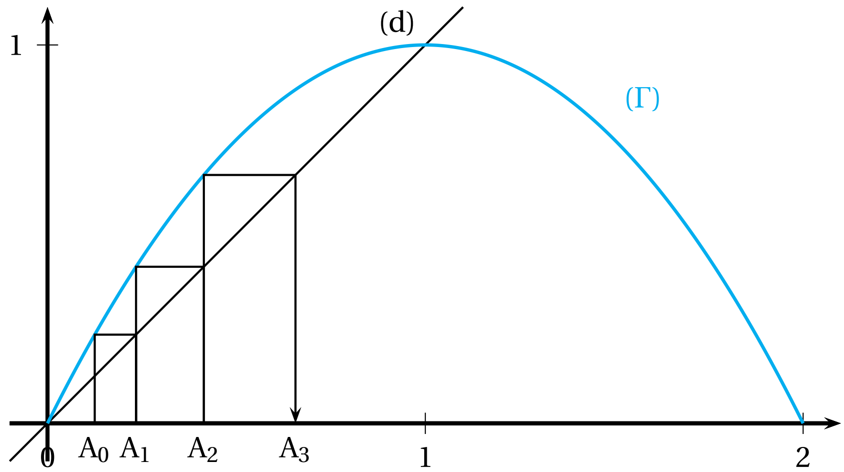
Correction exercice n°1

1. (a) $u_1 = u_0(2-u_0)$ donc $u_1 = \frac{1}{8}\left(2-\frac{1}{8}\right)$ d'où $u_1 = \frac{15}{64}$.

   De même $u_2 = u_1(2-u_1)$ d'où $u_2 = \frac{1695}{4096}$.

   (b) On construit les quatre premiers termes de la suite :



2. (a) Soit $\mathscr{P}_n$: $0 < u_n < 1$.

   Montrons tout d'abord que f est strictement croissante sur $[0;1]$.

   f est dérivable en tant que polynôme de degré 2 sur $[0;1]$ et pour tout réel $x \in [0;1]$, on a $f'(x) = 2-2x > 0$: on en déduit que f est strictement croissante sur $[0;1]$

   — *Initialisation.* Vérifions que $\mathscr{P}_0$ est vraie.
   On a $u_0 = a$ et $0 < a < 1$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.

   — *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie, c'est-à-dire $0 < u_n < 1$.
   Par hypothèse de récurrence $0 < u_n < 1$ donc $f(0) < f(u_n) < f(1)$ car la fonction f est strictement croissante sur $[0;1]$ donc l'ordre est conservé sur cet intervalle.
   Or $f(1) = 1$, $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(0) = 0$ donc $0 < u_{n+1} < 1$ ce qui prouve que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

   — **Conclusion :** $\mathscr{P}_0$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire à partir du rang $n=0$, on en déduit que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n < 1$$

   .

   (b) $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{array}{rcl} u_{n+1} - u_n & = & u_n(2-u_n) - u_n \\ & = & u_n(1-u_n) \end{array}$$

   Or on vient de démontrer que $u_n < 1 \iff 1 - u_n > 0$ et comme $u_n > 0$, on obtient par produit $u_{n+1} - u_n > 0$, ce qui montre que la suite (u_n) est croissante.

(c) La suite (u_n) est croissante et majorée par 1 : elle est donc convergente vers une limite ℓ telle que $\ell \leqslant 1$.

3. (a) $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 1 - u_{n+1} \\ &= 1 - u_n(2 - u_n) \\ &= 1 - 2u_n + u_n^2 \\ &= (1 - u_n)^2 \\ &= v_n^2 \end{aligned}$$

(b) On a $v_0 = 1 - u_0 = 1 - \dfrac{1}{8}$ donc $v_0 = \dfrac{7}{8}$.

D'où $v_1 = v_0^2 = \left(\dfrac{7}{8}\right)^2$.

Puis $v_2 = v_1^2 = \left[\left(\dfrac{7}{8}\right)^2\right]^2 = \left(\dfrac{7}{8}\right)^{2^2}$.

On va montrer par récurrence que $v_n = \left(\dfrac{7}{8}\right)^{2^n}$.

- *Initialisation* : on a vu que la proposition est vraie au rang zéro.
- *Hérédité* : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $v_n = \left(\dfrac{7}{8}\right)^{2^n}$.

On a $v_{n+1} = v_n^2$ et par hypothèse de récurrence $v_n = \left(\dfrac{7}{8}\right)^{2^n}$.

On en déduit que $v_{n+1} = \left[\left(\dfrac{7}{8}\right)^{2^n}\right]^2$ ce qui induit que $v_{n+1} = \left(\dfrac{7}{8}\right)^{2\times 2^n} = \left(\dfrac{7}{8}\right)^{2^{n+1}}$.

La relation est vraie au rang $n+1$: elle est donc vraie pour tout entier naturel n.

(c) Comme $-1 < \dfrac{7}{8} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{7}{8}\right)^n = 0$ et a fortiori $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{7}{8}\right)^{2^n} = 0$.

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Comme $v_n = 1 - u_n \iff u_n = 1 - v_n$; on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.