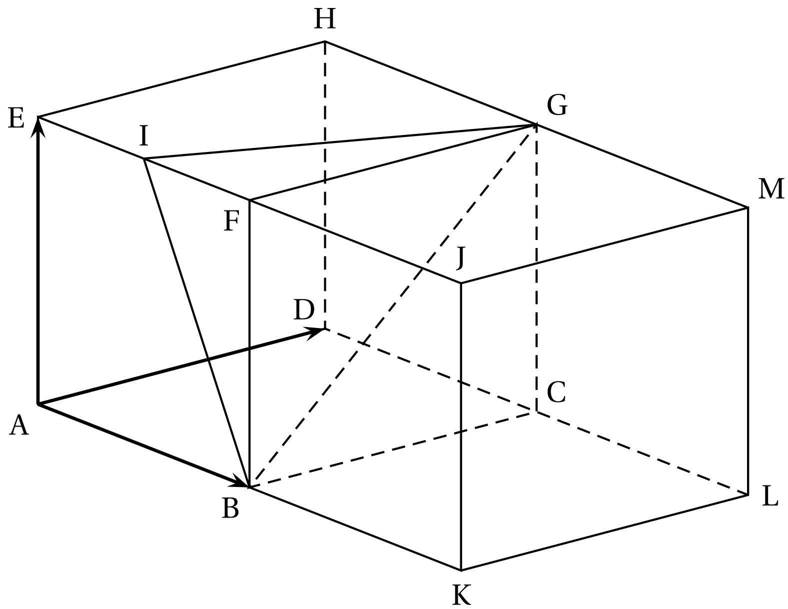
Correction de l'exercice 1 TMaths G2

Partie A

On considère deux cubes ABCDEFGH et BKLCFJMG positionnés comme sur la figure suivante :



Le point I est le milieu de [EF].
Dans toute la suite de l'exercice, on se place dans le repère orthonormé $\left(\text{A}\,;\,\overrightarrow{\text{AB}}\,;\,\overrightarrow{\text{AD}}\,;\,\overrightarrow{\text{AE}}\right)$.
Ainsi, par exemple, les points F, G et J ont pour coordonnées

$$\text{F}(1\,;0\,;1),\qquad \text{G}(1\,;1\,;1)\quad\text{et}\quad \text{J}(2\,;0\,;1).$$

1. Montrer que le volume du tétraèdre FIGB est égal à $\dfrac{1}{12}$ d'unité de volume.

   On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule :

   $$V = \frac{1}{3} \times \text{aire d'une base}$$

   ABCDEFGH et BKLCFJMG sont des cubes, ainsi a FG = BF = EH = AD = 1.
   I est le milieu de [EF], on a $\text{FI} = \dfrac{1}{2} \times \text{EF} = \dfrac{1}{2} \times 1 = \dfrac{1}{2}$.
   En prenant comme base le triangle rectangle isocèle BFG et la hauteur [FI], on a donc :

   $$\begin{aligned} V_{\text{FIGB}} &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{12} \quad \text{(unité de volume).} \end{aligned}$$

2. Déterminer les coordonnées du point I.

On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AI}} &= \overrightarrow{\mathrm{AE}}+\overrightarrow{\mathrm{EI}}\\ &= \overrightarrow{\mathrm{AE}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{EF}}\\ &= \overrightarrow{\mathrm{AE}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\end{aligned}$$

On déduit que les coordonnées du point I sont $\left(\frac{1}{2}\ ;\ 0\ ;\ 1\right)$.

3. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{DJ}}$ un vecteur normal au plan (BIG).

Avec J$(2 ; 0 ; 1)$ et D$(0 ; 1 ; 0)$, on obtient $\overrightarrow{\mathrm{DJ}}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$.

D'autre part $\overrightarrow{\mathrm{BI}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0-0\\1-0\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{\mathrm{BI}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}$.

De G$(1 ; 1 ; 1)$ on obtient $\overrightarrow{\mathrm{BG}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

On a donc $\overrightarrow{\mathrm{DJ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BI}} = -1+0+1 = 0$ et
$\overrightarrow{\mathrm{DJ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BG}} = 0-1+1 = 0$.

Le $\overrightarrow{\mathrm{DJ}}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (BIG) : c'est un vecteur normal à ce plan.

4. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (BIG) est $2x-y+z-2=0$.

$\overrightarrow{\mathrm{DJ}}$ étant un vecteur normal du plan (BIG), une équation cartésienne de ce plan est : $2x-1y+1z+d=0$ avec $d\in\mathbb{R}$.

Or B$(1 ; 0 ; 0)\in$ (BIG) $\iff 2\times1-1\times0+1\times0+d=0 \iff 2+d=0 \iff d=-2$.

Conclusion : (BIG) : $2x-1y+1z-2=0$.

5. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d, orthogonale à (BIG) et passant par F.

La droite d orthogonale à (BIG), elle est donc dirigée par le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{DJ}}$.
De plus cette droite passe par le point F$(1 ; 0 ; 1)$.
On en déduit qu'une représentation paramétrique de la droite d est :

$$\left\{\begin{array}{lcl}x &=& 1+2t\\ y-0 &=& \quad -t\\ z &=& 1+t\end{array}\right.,\ t\in\mathbb{R}$$

6. (a) La droite d coupe le plan (BIG) au point L$'$.

Montrer que les coordonnées du point L$'$ sont $\left(\dfrac{2}{3}\ ;\ \dfrac{1}{6}\ ;\ \dfrac{5}{6}\right)$.

Si L$'(x\ ;\ y\ ;\ z)$ est commun à d et au plan (BIG), ses coordonnées vérifient les équations paramétriques de d et l'équation du plan (BIG) soit le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1+2t \\ y-0 & = & \quad -t \\ z & = & 1+\ \ t \\ 2x-y+z-2 & = & 0 \end{array}\right., t \in \mathbb{R}.$$

En remplaçant x, y et z par leurs expressions en fonction de t dans la dernière équation on obtient :

$2(1+2t)-(-t)+(1+t)-2=0 \iff 2+4t+t+1+t-2=0 \iff 6t+1=0 \iff t=-\dfrac{1}{6}$ et en remplaçant dans x, y et z, on obtient $x=1+\dfrac{2}{6}=\dfrac{2}{3}$, $y=-\left(-\dfrac{1}{6}\right)=\dfrac{1}{6}$ et $z=1-\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{6}$.

Conclusion : le point L' a pour coordonnées $\left(\dfrac{2}{3}\ ;\ \dfrac{1}{6}\ ;\ \dfrac{5}{6}\right)$.

(b) Calculer la longueur FL.

On a $\overrightarrow{\text{FL'}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\ \frac{1}{6}\\ -\frac{1}{6}\end{pmatrix}$,

$$\begin{array}{rcl} \text{FL'}^2 & = & \overrightarrow{\text{FL'}}\cdot\overrightarrow{\text{FL'}} \\ & = & \left(-\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(\dfrac{1}{6}\right)^2+\left(-\dfrac{1}{6}\right)^2 \\ & = & \dfrac{6}{36} \end{array}$$

Ainsi FL$'=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ (FL' $\geqslant 0$)

(c) Déduire des questions précédentes l'aire du triangle IGB.

En prenant comme base le triangle (BIG) le tétraèdre FIGB a pour hauteur [FL$'$] ; on a donc :

$$\begin{array}{rcl} V_{\text{FIGB}} & = & \text{aire (BIG)} \times \text{FL}' \times \dfrac{1}{3} \\ \text{aire (BIG)} & = & \dfrac{3V_{\text{FIGB}}}{\text{FL}'} \\ & = & \dfrac{\sqrt{6}}{4}\ \text{unités d'aire} \end{array}$$