Correction exercice n°2

1. De $\mathrm{I}\left(\frac{1}{2}\ ;\ 0\ ;\ 0\right)$, $\mathrm{J}\left(0\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ 1\right)$ et $\mathrm{K}\left(1\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ 0\right)$ et $\mathrm{L}\left(1\ ;\ 1\ ;\ \frac{1}{2}\right)$
2. La droite (IJ) passe par le point $\mathrm{I}\left(\frac{1}{2}\ ;\ 0\ ;\ 0\right)$ et est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}\left(-\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ 1\right)$.
   Une représentation paramétrique de la droite (IJ) est : $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}t \\ y & = & \frac{1}{2}t, \quad t\in\mathbb{R} \\ z & = & t \end{array}\right.$
   La droite (KL) passe par le point $\mathrm{K}\left(1\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ 0\right)$ et est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{KL}}\left(0\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$.
   Une représentation paramétrique de la droite (KL) est : $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1 \\ y & = & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}k, \quad k\in\mathbb{R} \\ z & = & \frac{1}{2}k \end{array}\right.$
3. On résout le double système $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}t \\ y & = & \frac{1}{2}t, \quad t\in\mathbb{R} \\ z & = & t \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1 \\ y & = & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}k, \quad k\in\mathbb{R} \\ z & = & \frac{1}{2}k \end{array}\right.$.
   Il vient alors : $\left\{\begin{array}{lcl} \frac{1}{2}-\frac{1}{2}t & = & 1 \\ \frac{1}{2}t & = & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}k \\ t & = & \frac{1}{2}k \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} t & = & -1 \\ k & = & -2 \\ -1 & = & -1 \quad \text{cohérent} \end{array}\right.$
   On en déduit que les droites (IJ) et (KL) sont sécantes. Pour trouver les coordonnées de leur point d'intersection, on peut utiliser la représentation paramétrique de la droite (IJ) en remplaçant t par -1 ou utiliser celle de (KL) en remplaçant k par -2 : on obtient alors :
   $$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1 \\ y & = & -\frac{1}{2} \\ z & = & -1 \end{array}\right.$$
   Les droites (IJ) et (KL) se coupent au point de coordonnées $\left(1\ ;\ -\frac{1}{2}\ ;\ -1\right)$.
4. Les droites (IJ) et (KL) sont sécantes : elles sont donc coplanaires.
   On en déduit que les points I, J, K et L sont coplanaires.
5. Voici la section du cube par le plan (IJK), il s'agit de l'hexagone $IJMNKP$: