Correction de l'exercice 2 TMaths G2

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 8$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{6u_n + 2}{u_n + 5}.$$

1. Calculer u_1.

   On a :

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{6u_0+2}{u_0+5} \\ &= \frac{6\times 8+2}{8+5} \\ &= \frac{50}{13} \end{aligned}$$

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{6x+2}{x+5}.$$

   Ainsi, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = f(u_n)$.

   (a) Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

   f est donc dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$.
   $\forall x \in [0\,;\,+\infty[$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{6(x+5)-1(6x+2)}{(x+5)^2} \\ &= \frac{6x+30-6x-2}{(x+5)^2} \\ &= \frac{28}{(x+5)^2} \end{aligned}$$

   f' est donc le quotient de deux nombres strictement supérieurs à zéro : ainsi $f' > 0$ et donc la fonction f est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$ et son minimum est $f(0) = \frac{2}{5} = \frac{4}{10} = 0{,}4$.
   En déduire que pour tout réel $x > 2$, on a $f(x) > 2$.
   On a $f(2) = 2$: or f est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$:
   $x > 2 \implies f(x) > f(2) = 2$ d'après le calcul précédent.

   (b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n > 2$.

   Soit $\mathscr{P}_n :\ u_n > 2$.
   Initialisation : $u_0 = 8 > 2$: la proposition est vraie au rang 0.
   Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathscr{P}_n$ vraie (i.e $u_n > 2$). Montrons alors que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie (i.e $u_{n+1} > 2$).
   Par hypothèse de récurrence $u_n > 2$.
   Par croissance de la fonction f : $f(u_n) > f(2)$ où $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(2) = 2$.
   On a ainsi $u_{n+1} > 2$ ce qui prouve que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
   Conclusion : $\mathscr{P}_0$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire à partir du rang $n = 0$.
   $\mathscr{P}_n$ est vraie est donc vraie pour tout entier naturel n.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 2$$

3. On admet que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(2-u_n)(u_n+1)}{u_n+5}.$$

   (a) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

   On a $u_n > 2 \implies u_n + 1 > 2 + 1 > 0$ et $u_n > 2 \implies u_n + 5 > 2 + 5 > 0$.
   Le signe du quotient précédent est donc celui de $2 - u_n$; or $u_n > 2 \implies$ $0 > 2 - u_n$, donc $u_{n+1} - u_n < 0$ ce qui signifie que la suite (u_n) est décroissante.

   (b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

   La suite (u_n) étant décroissante et minorée par 2 est donc convergente vers une limite ℓ, avec $\ell \geqslant 2$.

4. On définit la suite (v_n) pour tout entier naturel par :

$$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}.$$

   (a) Calculer v_0.

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{u_0 - 2}{u_0 + 1} \\ &= \frac{8-2}{8+1} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

   (b) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{4}{7}$.

   $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} + 1} \\ &= \frac{\frac{6u_n+2}{u_n+5} - 2}{\frac{6u_n+2}{u_n+5} + 1} \\ &= \frac{\frac{6u_n+2}{u_n+5} - \frac{2u_n+10}{u_n+5}}{\frac{6u_n+2}{u_n+5} + \frac{u_n+5}{u_n+5}} \\ &= \frac{4u_n - 8}{7u_n + 7} \\ &= \frac{4(u_n - 2)}{7(u_n + 1)} \\ &= \frac{4}{7} v_n \end{aligned}$$

   La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{4}{7}$.

(c) Déterminer, en justifiant, la limite de (v_n).

- On sait qu'alors quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \left(\frac{4}{7}\right)^n$ ou encore $v_n = \frac{2}{3} \times \left(\frac{4}{7}\right)^n$.

Or comme $-1 < \frac{4}{7} < 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{4}{7}\right)^n$ et par produit de limites $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

En déduire la limite de (u_n).

On a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n - 2}{u_n + 1}$ et comme $u_n + 1 > 2 + 1 > 0$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n - 2 = 0$, soit enfin $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$. Donc $\ell = 2$.

5. On considère la fonction Python seuil ci-contre, où A est un nombre réel strictement plus grand que 2. Donner, sans justification, la valeur renvoyée par la commande seuil (2.001) puis interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

```
def   seuil (A) :
      n = 0
      u = 8
      while u > A :
            u = (6*u + 2) / (u + 5)
            n = n + 1
      return n
```

On vérifie à la calculatrice que $u_{14} \approx 2{,}00079$ est le premier terme inférieur à 2,001. Valeur renvoyée : 14.