Correction exercice n$^{\text{o}}$3

Partie A

1. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\mathrm{e}^x + (1-x)\mathrm{e}^x \\ &= -x\mathrm{e}^x \end{aligned}$$

   On étudie le signe de $g'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
   $g'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.
   On en déduit le tableau de signes de $g'(x)$ sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	
variations de g		$\nearrow$		$\searrow$	

   La fonction g est donc strictement croissante sur $]-\infty\,; 0]$ et strictement décroissante sur $[0\,; +\infty[$.

2. Sur $[1,27\,; 1,28]$:
   - la fonction g est continue car dérivable ;
   - la fonction g est strictement décroissante ;
   - $0 \in [1+(1-0,28)\mathrm{e}^{0,28}\,; 1+(1-0,27)\mathrm{e}^{0,27}]$ intervalle image de l'intervalle $[1,27\,; 1,28]$ par la fonction g, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[1,27\,; 1,28]$.

3. On a $g(x) = \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x + 1$.
   Or $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0$ (limite de cours) et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 1$.
   La fonction g est strictement croissante sur $]-\infty\,; 0]$ on en déduit que $g(x) > 1$ sur $]-\infty\,; 0]$.
   La fonction g est donc strictement positive sur $]-\infty 0]$.
   D'après la question précédente $g(x) > 0$ sur $[0\,; \alpha[$ et $g(x) < 0$ sur $]\alpha\,; +\infty[$.
   La fonction g est continue et est strictement décroissante sur $[0\,; +\infty[$. De plus, $g(\alpha) = 0$, on peut en déduire le tableau de signes de g sur $[0\,; +\infty[$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
signe de $g(x)$		$+$	0	$-$	

Partie B

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ d'après le cours.

   Pour la fonction f, on a une forme indéterminée du type « $\dfrac{\infty}{\infty}$ » donc on change d'écriture.

   Pour tout réel $x > 0$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{e^x + 1} + 2 \\ &= \frac{1}{\dfrac{e^x}{x} + \dfrac{1}{x}} + 2 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \end{array}\right\} \overset{\text{par somme des limites}}{\Longrightarrow} \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} + \frac{1}{x} = +\infty.$$

   Et donc par inverse des limites puis par somme :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2}.$$

   On en déduit que la droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

2. (a) On a :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \infty} x = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x \to +\infty} e^x + 1 = 1 \end{array}\right\} \overset{\text{par quotient des limites}}{\Longrightarrow} \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x + 1} = -\infty.$$

   D'où :

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}.$$

   (b) On pose $d(x) = f(x) - (x + 2)$ et on étudie le signe de $d(x)$ sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} d(x) &= f(x) - (x+2) \\ &= \frac{x}{e^x + 1} + 2 - x - 2 \\ &= \frac{x}{e^x + 1} - x \\ &= \frac{-xe^x}{e^x + 1} \end{aligned}$$

   Pour tout réel x on a $e^x > 0$ et $e^x + 1 > 0$ donc $d(x)$ a le même signe que $-x$ sur $\mathbb{R}$.

   — Si $x < 0$ on a $d(x) > 0$ donc $\mathscr{C}$ est située au dessus de $\mathscr{D}$.
   — Si $x = 0$ on a $d(x) = 0$:$\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ sont sécantes.
   — Si $x > 0$ on a $d(x) < 0$ donc $\mathscr{C}$ est située en dessous de $\mathscr{D}$.

3. (a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 \times (e^x + 1) - x \times e^x}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{e^x + 1 - xe^x}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{1 + (1 - x)e^x}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{g(x)}{(e^x + 1)^2} \end{aligned}$$

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $(e^x + 1)^2 > 0$ ce qui prouve que $f'(x)$ est du signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

(b) $f(\alpha) = \dfrac{\alpha}{e^{\alpha}+1} + 2$.

Or on sait que $g(\alpha) = 0$ d'après la partie A donc $e^{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha - 1}$ vu que $\alpha \neq 1$. Ainsi

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{\alpha}{\frac{1}{\alpha-1}+1} + 2 \\ &= \frac{\alpha}{\frac{1}{\alpha-1}+\frac{\alpha-1}{\alpha-1}} + 2 \\ &= \frac{\alpha}{\frac{\alpha}{\alpha-1}} + 2 \\ &= \alpha - 1 + 2 \\ &= \alpha + 1 \end{aligned}$$

On en déduit que $p = 1$ et $q = 1$.

(c) On peut donc dresser la tableau de variation complet de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	$\alpha+1$	$\searrow$	2