

---

### Correction exercice n°3

---

#### Partie A

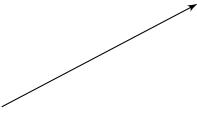
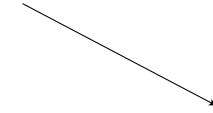
1.  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout réel  $x$  :

$$\begin{aligned} g'(x) &= -e^x + (1-x)e^x \\ &= -xe^x \end{aligned}$$

On étudie le signe de  $g'(x)$  sur  $\mathbb{R}$ .

$$g'(x) = 0 \iff x = 0.$$

On en déduit le tableau de signes de  $g'(x)$  sur  $\mathbb{R}$  :

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
signe de $g'(x)$	+	0	-
variations de $g$			

La fonction  $g$  est donc strictement croissante sur  $]-\infty; 0]$  et strictement décroissante sur  $[0; +\infty[$ .

2. Sur  $[1,27; 1,28]$  :

- la fonction  $g$  est continue car dérivable;
- la fonction  $g$  est strictement décroissante;
- $0 \in [1 + (1 - 0,28)e^{0,28}; 1 + (1 - 0,27)e^{0,27}]$  intervalle image de l'intervalle  $[1,27; 1,28]$  par la fonction  $g$ , d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans l'intervalle  $[1,27; 1,28]$ .

3. On a  $g(x) = e^x - xe^x + 1$ .

Or  $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$  (limite de cours) et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$  d'où  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1$ .

La fonction  $g$  est strictement croissante sur  $]-\infty; 0]$  on en déduit que  $g(x) > 1$  sur  $]-\infty; 0]$ .

La fonction  $g$  est donc strictement positive sur  $]-\infty; 0]$ .

D'après la question précédente  $g(x) > 0$  sur  $[0; \alpha[$  et  $g(x) < 0$  sur  $\alpha; +\infty[$ .

La fonction  $g$  est continue et est strictement décroissante sur  $[0; +\infty[$ . De plus,  $g(\alpha) = 0$ , on peut en déduire le tableau de signes de  $g$  sur  $[0; +\infty[$  :

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
signe de $g(x)$	+	0	-

## Partie B

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$  d'après le cours.

Pour la fonction  $f$ , on a une forme indéterminée du type «  $\frac{\infty}{\infty}$  » donc on change d'écriture.

Pour tout réel  $x > 0$ ,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{e^x + 1} + 2 \\ &= \frac{1}{\frac{e^x + 1}{x}} + 2 \\ &= \frac{1}{\frac{e^x}{x} + \frac{1}{x}} + 2 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{par somme des limites} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} + \frac{1}{x} = +\infty.$$

Et donc par inverse des limites puis par somme :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2}.$$

On en déduit que la droite d'équation  $y = 2$  est asymptote horizontale à  $\mathcal{C}$  au voisinage de  $+\infty$ .

2. (a) On a :

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} x &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + 1 &= 1 \end{aligned} \right\} \text{par quotient des limites} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x + 1} = -\infty.$$

D'où :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty}.$$

(b) On pose  $d(x) = f(x) - (x + 2)$  et on étudie le signe de  $d(x)$  sur  $\mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} d(x) &= f(x) - (x + 2) \\ &= \frac{x}{e^x + 1} + 2 - x - 2 \\ &= \frac{x}{e^x + 1} - x \\ &= \frac{-x e^x}{e^x + 1} \end{aligned}$$

Pour tout réel  $x$  on a  $e^x > 0$  et  $e^x + 1 > 0$  donc  $d(x)$  a le même signe que  $-x$  sur  $\mathbb{R}$ .

- Si  $x < 0$  on a  $d(x) > 0$  donc  $\mathcal{C}$  est située au dessus de  $\mathcal{D}$ .
- Si  $x = 0$  on a  $d(x) = 0$  :  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  sont sécantes.
- Si  $x > 0$  on a  $d(x) < 0$  donc  $\mathcal{C}$  est située en dessous de  $\mathcal{D}$ .

3. (a)  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout réel  $x$ ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 \times (e^x + 1) - x \times e^x}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{e^x + 1 - x e^x}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{1 + (1 - x)e^x}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{g(x)}{(e^x + 1)^2} \end{aligned}$$

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $(e^x + 1)^2 > 0$  ce qui prouve que  $f'(x)$  est du signe de  $g(x)$  sur  $\mathbb{R}$ .

$$(b) \quad f(\alpha) = \frac{\alpha}{e^\alpha + 1} + 2.$$

Or on sait que  $g(\alpha) = 0$  d'après la partie A donc  $e^\alpha = \frac{1}{\alpha - 1}$  vu que  $\alpha \neq 1$ . Ainsi

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{\alpha}{\frac{1}{\alpha - 1} + 1} + 2 \\ &= \frac{\alpha}{\frac{1}{\alpha - 1} + \frac{\alpha - 1}{\alpha - 1}} + 2 \\ &= \frac{\alpha}{\frac{\alpha}{\alpha - 1}} + 2 \\ &= \frac{\alpha - 1}{\alpha} + 2 \\ &= \alpha - 1 + 2 \\ &= \alpha + 1 \end{aligned}$$

On en déduit que  $p = 1$  et  $q = 1$ .

(c) On peut donc dresser la tableau de variation complet de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  :

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
signe de $f'(x)$	+	0	-
variations de $f$	$-\infty$	$\alpha + 1$	2