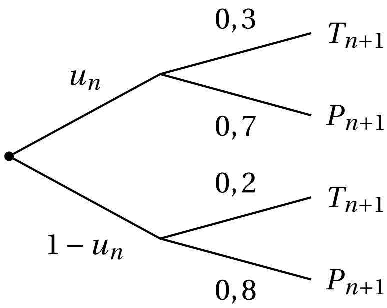
Correction exercice n°4

1. (a) T_1 et P_1 étant équiprobables, $\mathbf{P}(T_1) = \mathbf{P}(P_1) = 0,5$.
   D'après l'énoncé la probabilité de prendre le toboggan après avoir pris le plongeoir est égale à $\mathbf{P}_{P_1}(T_2) = 1 - 0,8 = 0,2$.
   Toujours d'après l'énoncé $\mathbf{P}_{T_1}(T_2) = 0,3$.

   (b) P_1 et T_1 forment une partition de l'univers, d'après le principe des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(T_2) &= \mathbf{P}(T_1 \cap T_2) + \mathbf{P}(P_1 \cap T_2) \\
&= \mathbf{P}(T_1) \times \mathbf{P}_{T_1}(T_2) + \mathbf{P}(P_1) \times \mathbf{P}_{P_1}(T_2) \\
&= 0,5 \times 0,3 + 0,5 \times 0,2 \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

   (c) Voici l'arbre complété :



   (d) P_n et T_n forment une partition de l'univers, d'après le principe des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \mathbf{P}(T_{n+1}) \\
&= \mathbf{P}(T_n \cap T_{n+1}) + \mathbf{P}(P_n \cap T_{n+1}) \\
&= u_n \times 0,3 + (1 - u_n) \times 0,2 \\
&= 0,3u_n + 0,2 - 0,2u_n \\
&= 0,1u_n + 0,2
\end{aligned}$$

   (e) La calculatrice donne $u_1 = 0,5$; $u_2 = 0,25$; $u_3 = 0,225$; $u_4 = 0,225$;
   $u_5 = 0,2225$.
   Il semble que u_n ait pour limite $0,222\ldots$.

2. (a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= u_{n+1} - \frac{2}{9} \\
&= 0,1u_n + 0,2 - \frac{2}{9} \\
&= \frac{1}{10}u_n + \frac{1}{5} - \frac{2}{9} \\
&= \frac{1}{10}u_n - \frac{1}{45} \\
&= \frac{1}{10}\left(u_n - \frac{2}{9}\right) \\
&= \frac{1}{10}v_n.
\end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\dfrac{1}{10}$; son premier terme est $v_1 = u_1 - \dfrac{2}{9}$ soit $v_1 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{9} = \dfrac{5}{18}$.

(b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a $v_n = v_1 q^{n-1}$ donc $v_n = \dfrac{5}{18}\left(\dfrac{1}{10}\right)^{n-1}$.

Comme $u_n = v_n + \dfrac{2}{9}$, on a $u_n = \dfrac{2}{9} + \dfrac{5}{18}\left(\dfrac{1}{10}\right)^{n-1}$.

(c) On a $\left(\dfrac{1}{10}\right)^{n-1} = \left(\dfrac{1}{10}\right)^{n} \times \left(\dfrac{1}{10}\right)^{-1} = 10\left(\dfrac{1}{10}\right)^{n}$.

$-1 < \dfrac{1}{10} < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{10}\right)^{n} = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 10\left(\dfrac{1}{10}\right)^{n} = 0$ puis $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{2}{9}$.

Or $\dfrac{2}{9} = 0,222\ldots$ ce qui valide la conjecture faite à la question 1. e.