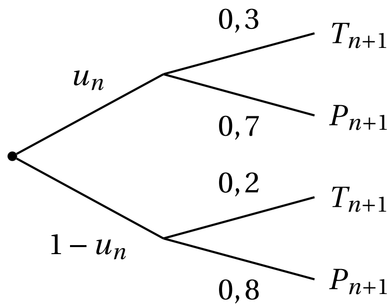
Correction exercice n°4

1. (a) T_1 et P_1 étant équiprobables, $p(T_1) = p(P_1) = 0,5$.
D'après l'énoncé la probabilité de prendre le toboggan après avoir pris le plongeoir est égale à $p_{P_1}(T_2) = 1 - 0,8 = 0,2$.
Toujours d'après l'énoncé $p_{T_1}(T_2) = 0,3$.

   (b) P_1 et T_1 forment une partition de l'univers, d'après le principe des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(T_2) &= p(T_1 \cap T_2) + p(P_1 \cap T_2) \\ &= p(T_1) \times p_{T_1}(T_2) + p(P_1) \times p_{P_1}(T_2) \\ &= 0,5 \times 0,3 + 0,5 \times 0,2 \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

   (c) Voici l'arbre complété :



   (d) P_n et T_n forment une partition de l'univers, d'après le principe des probabilités totales :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= p(T_{n+1}) \\ &= p(T_n \cap T_{n+1}) + p(P_n \cap T_{n+1}) \\ &= u_n \times 0,3 + (1 - u_n) \times 0,2 \\ &= 0,3u_n + 0,2 - 0,2u_n \\ &= 0,1u_n + 0,2 \end{aligned}$$

   (e) La calculatrice donne $u_1 = 0,5$; $u_2 = 0,25$; $u_3 = 0,225$; $u_4 = 0,225$;
$u_5 = 0,2225$.
Il semble que u_n ait pour limite $0,222\ldots$.

2. (a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \frac{2}{9} \\ &= 0,1u_n + 0,2 - \frac{2}{9} \\ &= \frac{1}{10}u_n + \frac{1}{5} - \frac{2}{9} \\ &= \frac{1}{10}u_n - \frac{1}{45} \\ &= \frac{1}{10}\left(u_n - \frac{2}{9}\right) \\ &= \frac{1}{10}v_n. \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\dfrac{1}{10}$; son premier terme est $v_1 = u_1 - \dfrac{2}{9}$ soit $v_1 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{9} = \dfrac{5}{18}$.

(b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a $v_n = v_1 q^{n-1}$ donc $v_n = \dfrac{5}{18}\left(\dfrac{1}{10}\right)^{n-1}$.

Comme $u_n = v_n + \dfrac{2}{9}$, on a $u_n = \dfrac{2}{9} + \dfrac{5}{18}\left(\dfrac{1}{10}\right)^{n-1}$.

(c) On a $\left(\dfrac{1}{10}\right)^{n-1} = \left(\dfrac{1}{10}\right)^{n} \times \left(\dfrac{1}{10}\right)^{-1} = 10\left(\dfrac{1}{10}\right)^{n}$.

$-1 < \dfrac{1}{10} < 1$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{10}\right)^{n} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 10\left(\dfrac{1}{10}\right)^{n} = 0$ puis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{2}{9}$.

Or $\dfrac{2}{9} = 0,222\ldots$ ce qui valide la conjecture faite à la question 1. e.