1. (a) Le coefficient directeur de la tangente à C au point d'abscisse 1 est $f'(1)$; graphiquement, c'est environ 2.

   (b) Le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe est le plus grand intervalle sur lequel la fonction f' est croissante, soit $[7{,}4\,;+\infty[$.

2. (a) Calculons la limite de la fonction f en $+\infty$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}2-\ln x=-\infty\end{array}\right\}\lim_{x\to+\infty}(2-\ln x)\times\ln x=-\infty \text{ et donc } \lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty.$$

   (b) Calculons $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ et interprétons graphiquement ce résultat.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0}\ln x=-\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}2-\ln x=+\infty\end{array}\right\}\lim_{x\to0}(2-\ln x)\times\ln x=-\infty \text{ et donc } \lim_{x\to0}f(x)=-\infty.$$

   On en déduit que la courbe C admet la droite d'équation $x=0$ comme asymptote verticale.

3. Les abscisses des points d'intersection de la courbe C et de l'axe des abscisses sont solutions de l'équation $f(x)=0$; on résout cette équation.

$$\begin{aligned}f(x)=0 &\iff (2-\ln x)\times\ln x=0 \iff 2-\ln x=0 \text{ ou } \ln x=0 \iff \ln x=2 \text{ ou } \ln x=0\\ &\iff x=\mathrm{e}^2 \text{ ou } x=1\end{aligned}$$

   Les coordonnées des points d'intersection de la courbe C et de l'axe des abscisses sont donc
   $(1\,;0)$ et $(\mathrm{e}^2\,;0)$.

4. (a) f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout réel x appartenant à $]0\,;+\infty[$:

$$\begin{aligned}f'(x) &= \left(0-\frac{1}{x}\right)\times\ln x+(2-\ln x)\times\frac{1}{x}\\ &= -\frac{\ln x}{x}+\frac{2-\ln x}{x}\\ &= \frac{2-2\ln x}{x}\\ &= \frac{2(1-\ln x)}{x}\end{aligned}$$

   (b) On a $x>0$ et $2>0$ donc $f'(x)$ est du signe de $1-\ln(x)$.
   Or :

$$\begin{aligned}1-\ln(x)>0 &\iff 1>\ln(x)\\ &\iff \mathrm{e}>x>0\end{aligned}$$

   $f'(x)$ s'annule et change de signe quand $1-\ln x=0$, donc pour $x=\mathrm{e}$.

$$\begin{aligned}f(\mathrm{e}) &= (2-\ln\mathrm{e})\times\ln\mathrm{e}\\ &= (2-1)\times1\\ &= 1\end{aligned}$$

   On en déduit le tableau de variations de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$:

x	0		e		$+\infty$
signe de $f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
Variation de f	‖ $-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$

5. On note f'' la dérivée seconde de f et on admet que sur $]0\,;\,+\infty[$, $f''(x) = \dfrac{2(\ln x - 2)}{x^2}$.

   La fonction f est convexe si et seulement si $f''(x) \geqslant 0$; on résout cette inéquation.

   $$\begin{aligned} f''(x) \geqslant 0 &\iff \frac{2(\ln x - 2)}{x^2} \geqslant 0 \\ &\iff \ln x - 2 \geqslant 0 \\ &\iff \ln x \geqslant 2 \\ &\iff x \geqslant \mathrm{e}^2 \end{aligned}$$

   Le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe est donc $\left[\mathrm{e}^2\,;\,+\infty\right[$.
   De même $f''(x) < 0 \iff 0 < x < \mathrm{e}^2$ et $f''(x) = 0 \iff x = \mathrm{e}^2$.
   f'' s'annule et change de signe en e^2 donc la courbe C admet le point de coordonnées $\left(\mathrm{e}^2\,;\,f\left(\mathrm{e}^2\right)\right)$ soit $\left(\mathrm{e}^2\,;\,0\right)$ comme point d'inflexion.