Correction exercice n°6

Partie A.

1. En écrivant pour $x \neq 0$, $\dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}$, on a aisément $\displaystyle\lim_{x+\to+\infty} \dfrac{x-1}{x+1} = 1$.
   Comme $\displaystyle\lim_{x+\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, on a donc $\displaystyle\lim_{x+\to+\infty} f(x) = 1$.
   On en déduit que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à $(\mathscr{C})$ au voisinage de $+\infty$.
2. f est dérivable sur appartenant à $[0\,;\,+\infty[$.
   $\forall x \in [0\,;\,+\infty[$,
   $$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} - \left(-\mathrm{e}^{-x}\right) \\ &= \frac{2}{(x+1)^2} + \mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$
   $\forall x \geqslant 0$, $f'(x) > 0$ car somme de deux termes supérieurs strictement à zéro : on en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$ avec $f(0) = -2$:

x	0	u	$+\infty$
Variation de f	-2	0	1

3. $(T_0)\ :\ y = f'(0)(x-0) + f(0)$ avec $f'(0) = 3$ et $f(0) = -2$ on a alors :
   $$(T_0)\ :\ y = 3x - 2$$
4.
   - f est continue car dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$
   - La fonction f est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

   Or $0 \in [-2\,;1[$ (intervalle image de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par la fonction f), donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution, notée u, dans l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
5. On a $f(1) < 0$ et $f(2) > 0$ donc $1 < u < 2$.
   De plus $f(1,5) < 0$ et $f(1,6)$ donc d'après la méthode de balayage, on en déduit que :
   $$1,5 < u < 1,6$$

Partie B.

1. Sur $[0\,;\,+\infty[$, f_n est dérivable et sur cet intervalle :
   $$\begin{aligned} f_n'(x) &= \frac{x+n-x+n}{(x+n)^2} + \mathrm{e}^{-x} \\ &= \frac{2n}{(x+n)^2} + \mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

Pour tout réel $x \geqslant 0$ on a $f_n'(x) > 0$ car somme de deux termes positifs non nuls : la fonction f_n est donc strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

On a $f_n(0) = -2$ et quel que soit n, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x-n}{x+n} = 1$, car $\dfrac{x-n}{x+n} = \dfrac{1-\frac{n}{x}}{1+\frac{n}{x}}$ pour $x \neq= 0$ et d'autre part $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{?x} = 0$, donc par somme des limites $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 1$.

x	$0 \qquad\qquad\qquad\qquad +\infty$
Variation de f_n	$-2 \nearrow 1$

2. (a) $f_n(n) = -\mathrm{e}^{-n} < 0$, car quel que soit n, $\mathrm{e}^{-n} > 0$.

   (b) Soit $\mathscr{P}_n$ la proposition : $\mathrm{e}^{n+1} > 2n+1$.

   • *Initialisation.* Vérifions que $\mathscr{P}_0$ est vraie.
   Si $n = 0$, on a $\mathrm{e}^{0+1} > 2\times 0+1$ ou encore $\mathrm{e} > 1$ et donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
   • *Hérédité.* Soit $n \in N$. Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie soit $\mathrm{e}^{n+1} > 2n+1$ et montons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie soit $\mathrm{e}^{n+2} > 2n+3$.
   Par hypothèse de récurrence, $\mathrm{e}^{n+1} > 2n+1$ d'où en multipliant chaque membre par $\mathrm{e} > 0$: $\mathrm{e}^{n+2} > \mathrm{e}(2n+1)$.
   Or $(2n+1)\mathrm{e} > 2n+3 \iff 2n(\mathrm{e}-1) > 3?\mathrm{e} \iff n > \dfrac{3-\mathrm{e}}{2(\mathrm{e}-1)} \quad (1)$
   car $(\mathrm{e}-1 > 0)$.
   Or $\dfrac{3-\mathrm{e}}{2(\mathrm{e}-1)} \approx 0{,}08$.
   $\mathscr{P}_{n+1}$ est donc vraie.

   $\mathscr{P}_0$ est vraie et est héréditaire à partir du rang $n = 0$, $\mathscr{P}_n$ est donc vraie pour tout entier naturel n.

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{e}^{n+1} > 2n+1$$

   Ainsi :

   $$\begin{aligned} f_n(n+1) &= \frac{n+1-n}{n+1+n} - \mathrm{e}^{-(n+1)} \\ &= \frac{1}{2n+1} - \mathrm{e}^{-(n+1)} \\ &= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{\mathrm{e}^{(n+1)}} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{(n+1)} - (2n+1)}{\mathrm{e}^{(n+1)}(2n+1)} \end{aligned}$$

   Or d'après la question précédente le numérateur est supérieur à zéro et par ailleurs le dénominateur produit de deux facteurs supérieurs à zéro est supérieur à zéro, donc $f_n(n+1) > 0$.

   (c) • f_n est continue car dérivable sur $[n\ ;\ n+1]$
   • La fonction f_n est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ donc sur $[n\ ;\ n+1]$.

   Or $f_n(n) < 0$ et $f_n(n+1) > 0$ donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution, notée u_n, dans l'intervalle $[n\ ;\ n+1]$.

3. D'après la question précédente, $n \geqslant u_n$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$.
   D'après le théorème de comparaison des limites, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Pour $n \neq= 0$, on a $n \leqslant u_n \leqslant n+1 \Rightarrow 1 \leqslant \dfrac{u_n}{n} \leqslant 1+\dfrac{1}{n}$.
Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, d'après le théorème de comparaison des limites : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = 1$.