Correction exercice n°8

1. On a :
   - $a_1 = a_0 - \frac{15}{100}a_0 + \frac{10}{100}b_0 = 1700 - 255 + 130 = 1575$
   - $b_1 = b_0 - \frac{10}{100}b_0 + \frac{15}{100}a_0 = 1300 - 130 + 255 = 1425$
2. Comme on suppose que durant l'étude, aucun sportif ne quitte le groupe, on a, pour tout entier naturel n,
$$a_n + b_n = 3000$$
3. Pour tout entier naturel n on a $a_{n+1} = a_n - \frac{15}{100}a_n + \frac{10}{100}b_n$.
   Or $a_n + b_n = 3000$ donc $b_n = 3000 - a_n$.
   Il vient alors :
$$\begin{array}{rcl} a_{n+1} & = & a_n - \frac{15}{100}a_n + \frac{10}{100}(3000 - a_n) \\ & = & a_n - \frac{15}{100}a_n + \frac{10}{100} \times 3000 - \frac{10}{100}a_n \\ & = & 0,75a_n + 300 \end{array}$$
4. (a) Soit $\mathscr{P}_n$: $1200 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n \leqslant 1700$.
   - **Initialisation :** $a_0 = 1700$ et $a_1 = 1575$ donc $1200 \leqslant a_1 \leqslant a_0 \leqslant 1700$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
   - **Hérédité :** soit n$\in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie, soit $1200 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n \leqslant 1700$ et montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie c'est-à-dire $1200 \leqslant a_{n+2} \leqslant a_{n+1} \leqslant 1700$.
     Par hypothèse de récurrence :
     $1200 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n \leqslant 1700$
     $\Longrightarrow 0,75 \times 1200 \leqslant 0,75 \times a_{n+1} \leqslant 0,75 \times a_n \leqslant 0,75 \times 1700$
     $\Longrightarrow 900 \leqslant 0,75 \times a_{n+1} \leqslant 0,75 \times a_n \leqslant 1275$
     $\Longrightarrow 900 + 300 \leqslant 0,75 \times a_{n+1} + 300 \leqslant 0,75 \times a_n + 300 \leqslant 1275 + 300$
     $\Longrightarrow 1200 \leqslant a_{n+2} \leqslant a_{n+1} \leqslant 1575$
     Or $1575 \leqslant 1700$ donc $1200 \leqslant a_{n+2} \leqslant a_{n+1} \leqslant 1700$ donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
   - **Conclusion :** $\mathscr{P}_0$ est vraie au rang 0 et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire à partir du rang $n = 0$ donc on en déduit que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n c'est-à-dire : $1200 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n \leqslant 1700$.

   (b)
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} \leqslant a_n$ donc la suite (a_n) est décroissante.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1200 \leqslant a_n$ donc la suite (a_n) est minorée par 1200.

   La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée donc, d'après le théorème de la convergence monotone, elle est convergente. vers une limite ℓ telle que $\ell \geqslant 1200$.
5. (a) $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{array}{rcl} v_{n+1} & = & a_{n+1} - 1200 \\ & = & 0,75a_n + 300 - 1200 \\ & = & 0,75a_n - 900 \\ & = & 0,75\left(a_n - \frac{900}{0,75}\right) \\ & = & 0,75(a_n - 1200) \\ & = & 0,75v_n \end{array}$$

$v_0 = a_0 - 1200 = 1700 - 1200 = 500$
Donc (v_n) est la suite géométrique de premier terme $v_0 = 500$ et de raison $q = 0,75$.

(b) Pour tout entier naturel n, on a : $v_n = v_0 \times q^n$ soit $v_n = 500 \times 0,75^n$.

(c) On sait que, pour tout entier naturel n, $a_n = v_n + 1200$, donc $a_n = 500 \times 0,75^n + 1200$.

6. (a) $-1 < 0,75 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,75^n = 0$;
On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} 500 \times 0,75^n = 0$ puis $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 1200$.

(b) On peut donc dire qu'à long terme, le nombre de sportifs dans le club A va se limiter à 1200 adhérents, et donc que le nombre de sportifs dans le club B se limitera à $3000 - 1200 = 1800$ adhérents.

7. (a) On complète le programme Python ci-dessous afin qu'il renvoie la plus petite valeur de n à partir de laquelle le nombre de membres du club A est strictement inférieur à 1280.

```
def seuil() :
    n = 0
    A = 1700
    while A>=1280 :
        n=n+1
        A = 0.75*A + 300
    return n
```

(b) La valeur renvoyée lorsqu'on appelle la fonction seuil est la plus petite valeur de n telle que $a_n < 1280$.
À la calculatrice on a $a_6 > 1280$ et $a_7 < 1280$ donc la valeur de n renvoyée par la fonction `seuil` est 7.