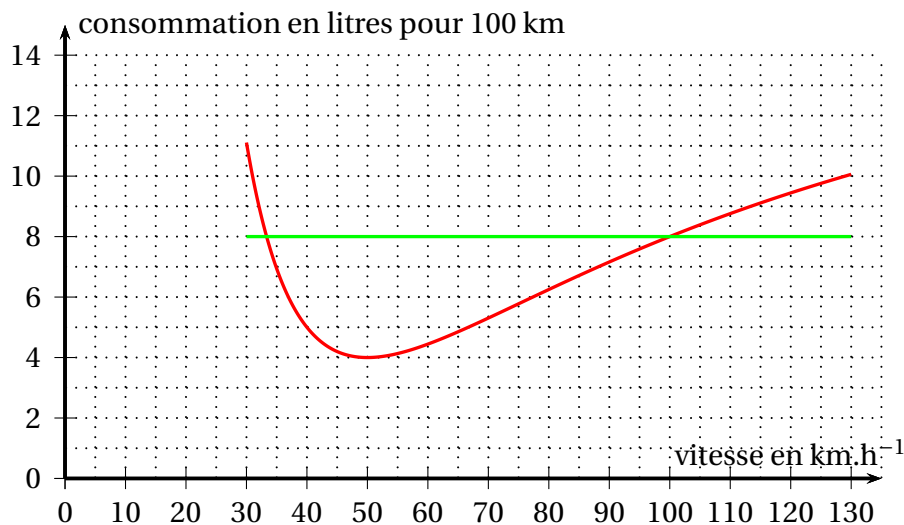


Exercice 1 – Fonctions

On s'intéresse à la consommation d'essence d'un véhicule en fonction de sa vitesse.

I. Lecture graphique

Le graphique ci-dessous représente la consommation d'essence en litres pour 100 km en fonction de la vitesse en km.h^{-1} du véhicule.



Avec la précision permise par le graphique, répondre aux questions suivantes :

1. Quelle est la consommation du véhicule lorsque celui-ci roule à 40 km.h^{-1} ?

En lisant l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse $x = 40$, on trouve que la consommation est de **5 litres pour 100 km**.

2. Pour quelle(s) vitesse(s) le véhicule consomme-t-il 8 litres pour 100 km ?

On trace la droite horizontale $y = 8$. Elle coupe la courbe en deux points dont les abscisses sont environ :

- $x_1 \approx 33 \text{ km.h}^{-1}$ (lecture approchée au début de la courbe).
- $x_2 = 100 \text{ km.h}^{-1}$ (valeur exacte d'après le modèle).

3. Pour quelle vitesse la consommation du véhicule semble-t-elle minimale ?

Le point le plus bas de la courbe semble être atteint pour une vitesse de 50 km.h^{-1} .
La consommation minimale semble être de 4 litres pour 100 km.

II. Modélisation

Si on note x la vitesse du véhicule en km.h^{-1} , avec $30 \leq x \leq 130$, la consommation d'essence en litres pour 100 km est modélisée par la fonction f d'expression :

$$f(x) = \frac{20x^2 - 1600x + 40000}{x^2}.$$

On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[30; 130]$.

1. Montrer que pour tout $x \in [30; 130]$,

$$f'(x) = \frac{800(2x - 100)}{x^3}.$$

$f(x)$ est de la forme $\frac{u(x)}{v(x)}$ avec :

- $u(x) = 20x^2 - 1600x + 40000 \implies u'(x) = 40x - 1600$
- $v(x) = x^2 \implies v'(x) = 2x$

La fonction f est dérivable sur $[30; 130]$.

$\forall x \in [30; 130]$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(40x - 1600)(x^2) - (20x^2 - 1600x + 40000)(2x)}{(x^2)^2} \\ &= \frac{40x^3 - 1600x^2 - (40x^3 - 3200x^2 + 80000x)}{x^4} \\ &= \frac{40x^3 - 1600x^2 - 40x^3 + 3200x^2 - 80000x}{x^4} \\ &= \frac{1600x^2 - 80000x}{x^4} \end{aligned}$$

En simplifiant par x (puisque $x \neq 0$) :

$$f'(x) = \frac{1600x - 80000}{x^3}$$

En factorisant par 800, on obtient bien la forme demandée :

$$f'(x) = \frac{800(2x - 100)}{x^3}$$

2. Démontrer la conjoncture de la question 3.

Pour trouver le minimum, étudions le signe de $f'(x)$ sur $[30; 130]$. Le dénominateur x^3 est strictement positif sur cet intervalle.

Le signe de $f'(x)$ est donc uniquement celui de $2x - 100$:

- $2x - 100 = 0 \iff x = 50$
- $2x - 100 > 0 \iff x > 50$

La fonction f est donc décroissante sur $[30; 50]$ puis croissante sur $[50; 130]$. Elle admet un minimum en $x = 50$.

La conjecture de la question 3 est ainsi démontrée.

Exercice 2– Suites numériques

Un globe-trotter a comme objectif de parcourir 2000 km à pied. Il peut parcourir 50 km en une journée, mais, la fatigue s'accumulant, la distance qu'il parcourt diminue de 2 % chaque nouvelle journée.

On note la distance d_n la distance parcourue durant le n -ième jour.

Le premier jour de son périple, il parcourt donc $d_1 = 50$ km.

1. Calculer la distance parcourue le deuxième jour.

Une diminution de 2% correspond à un coefficient multiplicateur de $C_M = 1 - \frac{2}{100} = 0,98$.
La distance parcourue le deuxième jour est :

$$\begin{aligned}d_2 &= d_1 - \frac{2}{100}d_1 \\ &= 0,98 \times 50 \\ &= 49\end{aligned}$$

Conclusion : la distance parcourue le deuxième jour est de 49 km.

2. Quelle est la nature de la suite (d_n) ? Donnez ses éléments caractéristiques.

On généralise le résultat pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}d_{n+1} &= d_n - \frac{2}{100}d_n \\ &= 0,98d_n\end{aligned}$$

d_{n+1} s'écrit sous la forme $q \times d_n$ avec $q = 0,98$ donc la suite (d_n) est donc la **suite géométrique** de premier terme $d_1 = 50$ et de raison $q = 0,98$.

3. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, déterminer l'expression de d_n en fonction de n .

$\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}d_n &= d_1 \times q^{n-1} \\ &= 50 \times 0,98^{n-1}\end{aligned}$$

4. Pour calculer le nombre de jours qu'il faudra au globe-trotter pour atteindre son objectif, on a écrit le programme Python suivant :

```
1 def nb jours :  
2     j=1  
3     u=50  
4     S=50  
5     While ..... :  
6         u=0.98*u  
7         S=S+u  
8         j = .....  
9     return j
```

Compléter les deux lignes incomplètes de ce programme.

Voici le programme complété pour calculer le nombre de jours nécessaires :

```
1 def nb jours :
2     j=1
3     u=50
4     S=50
5     while S<2000 :
6         u=0.98*u
7         S=S+u
8         j=j+1
9     return j
```

5. À l'aide de l'extrait de tableur ci-dessous, déterminer quand le globe-trotter aura atteint son objectif.

	A	B	C
1	j	u	s
2	1	50	50

76	75	11	1951
77	76	11	1962
78	77	11	1972
79	78	11	1983
80	79	10	1993
81	80	10	2003
82	81	10	2013

On cherche dans la colonne C (la somme S) la première valeur supérieure ou égale à 2000.

- Pour $j = 79$ (ligne 80), $S = 1993 < 2000$.
- Pour $j = 80$ (ligne 81), $S = 2003 \geq 2000$.

Le globe-trotter aura donc atteint son objectif au bout de **80 jours**.

Exercice 3– Probabilités

Lors des journées classées « rouges » selon Bison Futé, l'autoroute qui relie Paris à Limoges en passant par Orléans est surchargée.

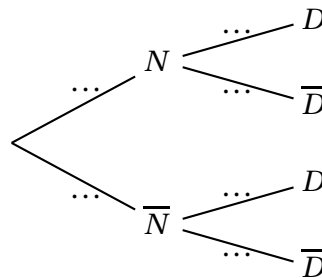
Lors de ces journées classées « rouges », on a pu observer le comportement des automobilistes faisant le trajet de Paris à Limoges en passant par Orléans.

- Pour le trajet de Paris à Orléans, 30 % d'entre eux prennent la route nationale, les autres prennent l'autoroute.
- Pour le trajet d'Orléans à Limoges :
 - parmi les automobilistes ayant pris la route nationale entre Paris et Orléans, 40 % prennent la route départementale, les autres prennent l'autoroute ;
 - parmi les automobilistes n'ayant pas pris la route nationale entre Paris et Orléans, 45 % prennent la route départementale, les autres prennent l'autoroute.

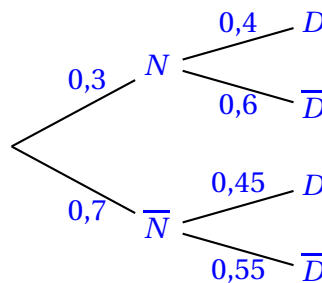
On choisit un automobiliste au hasard parmi ceux effectuant, en journée classée rouge, le trajet Paris – Limoges en passant par Orléans.

On note N l'événement « l'automobiliste prend la route nationale entre Paris et Orléans » et D l'événement « l'automobiliste prend la route départementale entre Orléans et Limoges ».

1. Compléter l'arbre ci-dessous.



D'après les données de l'énoncé, nous pouvons construire l'arbre suivant :



2. Calculer $\mathbf{P}(\overline{N} \cap \overline{D})$ et interpréter le résultat.

On a :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\overline{N} \cap \overline{D}) &= \mathbf{P}(\overline{N}) \times \mathbf{P}_{\overline{N}}(\overline{D}) \\ &= 0,70 \times 0,55 \\ &= 0,385\end{aligned}$$

Conclusion : la probabilité que l'automobiliste ne prenne ni la nationale ni la départementale (c'est-à-dire qu'il reste sur l'autoroute tout le trajet) est de 0,385.

3. Montrer que la probabilité que l'automobiliste ne choisisse pas la Route Départementale entre Orléans et Limoges est 0,565.

N et \bar{N} forment une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\bar{D}) &= \mathbf{P}(N \cap \bar{D}) + \mathbf{P}(\bar{N} \cap \bar{D}) \\ &= \mathbf{P}(N) \times \mathbf{P}_N(\bar{D}) + 0,385 \\ &= (0,30 \times 0,60) + 0,385 \\ &= 0,18 + 0,385 = 0,565 \end{aligned}$$

Le résultat est bien démontré.

Lors de ces journées classées « rouges », on donne les temps de parcours suivants :

- Paris – Orléans, par autoroute : 3 heures;
- Paris – Orléans, par nationale : 2 heures;
- Orléans – Limoges, par autoroute : 4 heures;
- Orléans – Limoges, par départementale : 3 heures et demie.

4. Recopier et compléter le tableau ci-dessous, qui donne pour chaque trajet, le temps en heure et la probabilité :

Évènement	$N \cap D$	$N \cap \bar{D}$	$\bar{N} \cap D$	$\bar{N} \cap \bar{D}$
Temps en heure	5,5			
Probabilité	0,12			

Calcul des temps : $N \cap D = 2 + 3,5 = 5,5\text{h}$; $N \cap \bar{D} = 2 + 4 = 6\text{h}$; $\bar{N} \cap D = 3 + 3,5 = 6,5\text{h}$; $\bar{N} \cap \bar{D} = 3 + 4 = 7\text{h}$.

Évènement	$N \cap D$	$N \cap \bar{D}$	$\bar{N} \cap D$	$\bar{N} \cap \bar{D}$
Temps (h)	5,5	6	6,5	7
Probabilité	0,12	0,18	0,315	0,385

5. Calculer l'espérance de la variable aléatoire qui donne la durée du trajet en heure et en donner une interprétation.

Soit X la variable aléatoire représentant la durée du trajet :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^4 p_i \times x_i \\ &= 5,5 \times 0,12 + 6 \times 0,18 + 6,5 \times 0,315 + 7 \times 0,385 \\ &= 0,66 + 1,08 + 2,0475 + 2,695 \\ &= 6,4825 \end{aligned}$$

Interprétation : en moyenne, lors d'une journée rouge, un automobiliste met **6,4825 heures** (soit environ 6h 29min) pour effectuer ce trajet.

Exercice 4– Géométrie

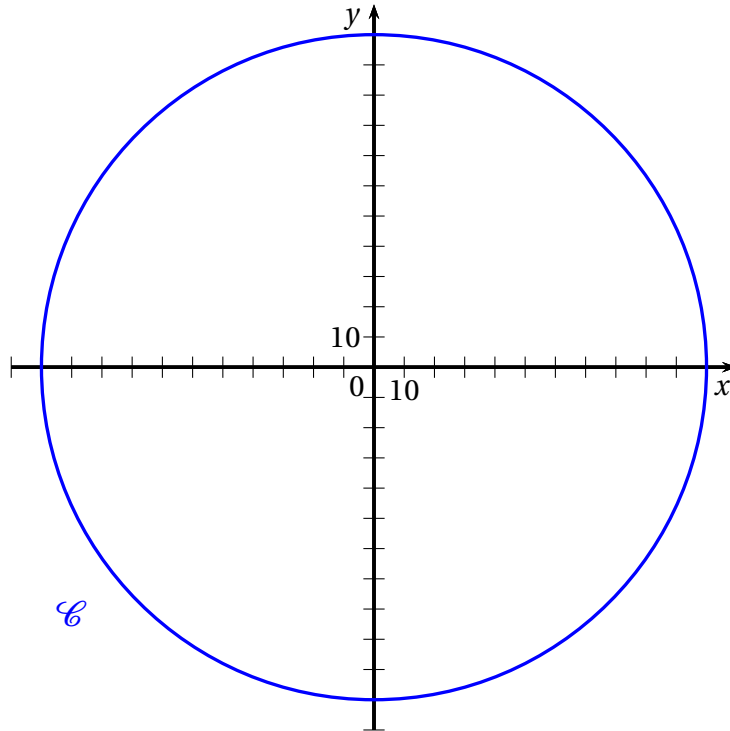
Le centre commercial « L'autre faubourg » de Cholet a été conçu en forme circulaire de 110 m de rayon permettant une visibilité à 360° et une accessibilité optimale, notamment aux personnes à mobilité réduite.

Le parking, situé à l'intérieur du disque, dessert l'ensemble des 32 magasins.

On munit le plan d'un repère orthonormé de centre O.

L'unité est le mètre.

Les entrées des magasins du centre commercial sont situées sur le cercle \mathcal{C} de centre O et de rayon 110.



1. Une allée centrale couverte a été construite afin de permettre aux automobilistes de rejoindre les magasins en cas d'intempéries. Elle est modélisée par la droite (AD) avec A(-30 ; 15) et D(80 ; -40).

- (a) Déterminer une équation du cercle \mathcal{C} .

Le cercle \mathcal{C} a pour centre l'origine $O(0; 0)$ et pour rayon $R = 110$.

Une équation cartésienne d'un cercle de centre O et de rayon R est

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = R^2$$

, avec $R = 110$ cette équation devient :

$$x^2 + y^2 = 12100$$

- (b) Démontrer que le point O appartient à la droite (AD).

Le point O appartient à la droite (AD) si les vecteurs \overrightarrow{OA} et \overrightarrow{OD} sont colinéaires. Déterminons leurs coordonnées :

- $\overrightarrow{OA} \begin{pmatrix} -30 \\ 15 \end{pmatrix}$

- $\overrightarrow{OD} \begin{pmatrix} 80 \\ -40 \end{pmatrix}$

On calcule le déterminant des vecteurs \overrightarrow{OA} et \overrightarrow{OD} :

$$\begin{aligned} \det(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OD}) &= \begin{vmatrix} -30 & 15 \\ 80 & -40 \end{vmatrix} \\ &= -30 \times (-40) - 15 \times 80 \\ &= 1200 - 1200 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Le déterminant est nul, les vecteurs \overrightarrow{OA} et \overrightarrow{OD} sont colinéaires.

Conclusion : le point O appartient bien à la droite (AD) .

2. Camille qui vient de garer sa voiture en $G(-10; -10)$ sous une pluie battante, souhaite se mettre à l'abri sous cette allée centrale, le plus rapidement possible.

(a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AO}$.

Calculons d'abord les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{AG} et \overrightarrow{AO} :

- $\overrightarrow{AG} \begin{pmatrix} -10 - (-30) \\ -10 - 15 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AG} \begin{pmatrix} 20 \\ -25 \end{pmatrix}$.
- De la même façon $\overrightarrow{AO} \begin{pmatrix} 30 \\ -15 \end{pmatrix}$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AO} &= 20 \times 30 + (-25) \times (-15) \\ &= 600 + 375 \\ &= 975 \end{aligned}$$

(b) Le point de la droite (AD) le plus proche de G est-il O ?

Le point de l'allée le plus proche de G est son projeté orthogonal sur (AD) . Pour que ce point soit O , il faudrait que le vecteur \overrightarrow{OG} soit orthogonal à un vecteur directeur de la droite (AD) , par exemple \overrightarrow{OA} .

Testons si $\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{OA} = 0$:

- $\overrightarrow{OG} \begin{pmatrix} -10 \\ -10 \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{OA} \begin{pmatrix} -30 \\ 15 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{OA} &= (-10) \times (-30) + (-10) \times 15 \\ &= 300 - 150 \\ &= 150 \end{aligned}$$

Le produit scalaire $\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{OA}$ n'est pas nul ($150 \neq 0$), donc les vecteurs ne sont pas orthogonaux.

Conclusion : le point O n'est pas le point le plus proche de G sur la droite (AD) .