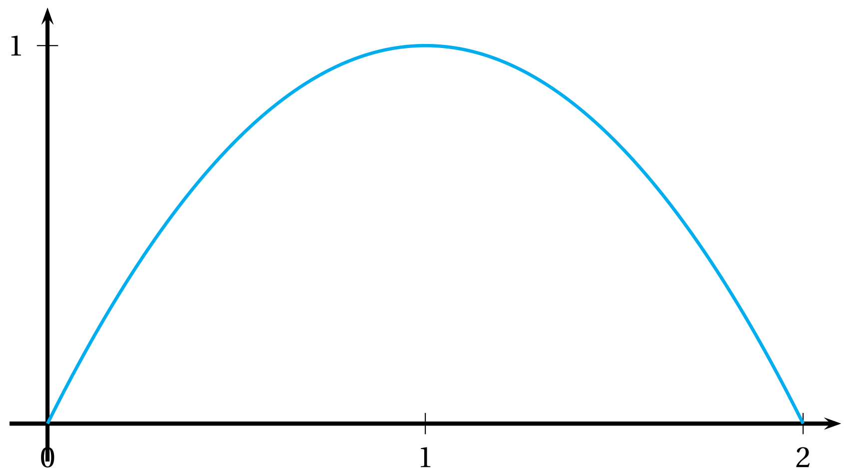
Exercice 1 : suites numériques

On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = a, \text{ et, pour tout entier } n,\ u_{n+1} = u_n\,(2 - u_n)$$

où a est un réel donné tel que $0 < a < 1$.

1. On suppose dans cette question que $a = \dfrac{1}{8}$
   (a) Calculer u_1 et u_2.
   (b) Dans le repère orthonormal donné ci-dessous, on donne la courbe (Γ) représentative de la fonction : $f\ : x \longmapsto x(2-x)$.
   Construire sur l'axe des abscisses les points A_1, A_2, A_3 d'abscisses respectives $u_1,\ u_2,\ u_3$.



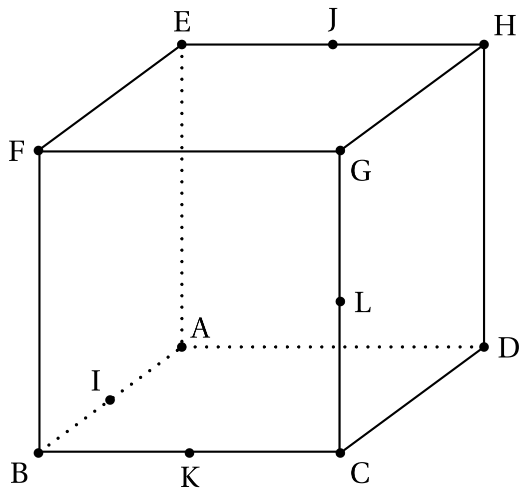
2. On suppose dans cette question que a est un réel quelconque de l'intervalle $]0\,;1[$.
   (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier n, $0 < u_n < 1$.
   (b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
   (c) Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?
3. On suppose à nouveau dans cette question que $a = \dfrac{1}{8}$. On considère la suite numérique (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$v_n = 1 - u_n.$$

   (a) Exprimer, pour tout entier n, v_{n+1} en fonction de v_n.
   (b) En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
   (c) Déterminer la limite de la suite (v_n), puis celle de la suite (u_n).

Exercice 2 : espace

ABCDEFGH est un cube.



I est le milieu du segment [AB], J est le milieu du segment [EH], K est le milieu du segment [BC] et L est le milieu du segment [CG].
On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. Déterminer les coordonnées des points I, J, K et L.
2. Déterminer une représentation paramétrique des droites (IJ) et (KL).
3. Les droites (IJ) et (KL) sont-elles sécantes ? Si oui, préciser les coordonnées de leur point d'intersection.
4. Les points I, J, K et L sont-ils coplanaires ? Justifier.
5. Représenter la section du cube ABCDEFGH par le plan (IJK).

Exercice 3 : fonction exponentielle et TVI

A. Étude d'une fonction auxiliaire.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\boldsymbol{g(x) = \mathrm{e}^{x}(1-x)+1.}$$

1. Étudier le sens de variation de g.
2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[1{,}27\,;\,1{,}28]$; on note α cette solution.
3. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $]-\infty\,;\,0[$.
   Justifier que $g(x) > 0$ sur $[0\,;\,\alpha[$ et $g(x) < 0$ sur $]\alpha\,;\,+\infty[$.

B. Étude de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^{x}+1}+2.}$$

On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement ce résultat.
2. (a) Calculer la limite de f en $-\infty$.
   (b) Étudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à (d) la droite d'équation $y = x+2$.
3. (a) Montrer que la fonction dérivée de f a même signe que la fonction g étudiée dans la partie **A)**.
   (b) Montrer qu'il existe deux entiers p et q tels que $f(\alpha) = p\alpha + q$.
   (c) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

Exercice 4 : suites et probabilités

Dans un zoo, l'unique activité d'un manchot est l'utilisation d'un bassin aquatique équipé d'un toboggan et d'un plongeoir.
On a observé que si un manchot choisit le toboggan, la probabilité qu'il le reprenne est $0,3$.
Si un manchot choisit le plongeoir, la probabilité qu'il le reprenne est $0,8$.
Lors du premier passage les deux équipements ont la même probabilité d'être choisis.
Pour tout entier naturel n non nul, on considère l'évènement :

— T_n : « le manchot utilise le toboggan lors de son n-ième passage. »

— P_n : « le manchot utilise le plongeoir lors de son n-ième passage. »

On considère alors la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :

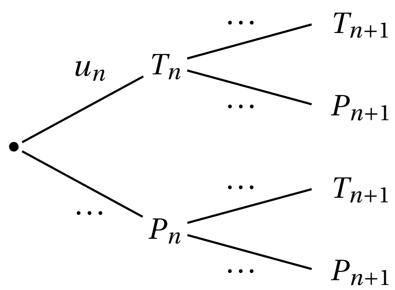
$$u_n = p(T_n)$$

où $p(T_n)$ est la probabilité de l'évènement T_n.

1. (a) Donner les valeurs des probabilités $p(T_1)$, $p(P_1)$ et des probabilités conditionnelles $p_{T_1}(T_2)$, $p_{P_1}(T_2)$.

   (b) Montrer que $p(T_2) = \dfrac{1}{4}$.

   (c) Compléter l'arbre suivant :



   (d) Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = 0,1u_n + 0,2$.

   (e) À l'aide de la calculatrice, émettre une conjecture concernant la limite de la suite (u_n).

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :

$$v_n = u_n - \frac{2}{9}.$$

   (a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{10}$. Préciser son premier terme.

   (b) Exprimer v_n en fonction de n. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

   (c) Calculer la limite de la suite (u_n). Ce résultat permet-il de valider la conjecture émise en **1. e.** ?

Exercice 5 : probabilités discrètes

Une entreprise fabrique des composants pour l'industrie automobile. Ces composants sont conçus sur trois chaînes de montage numérotées de 1 à 3.

- La moitié des composants est conçue sur la chaîne n° 1 ;
- 30 % des composants sont conçus sur la chaîne n° 2 ;
- les composants restant sont conçus sur la chaîne n° 3.

À l'issue du processus de fabrication, il apparaît que 1 % des pièces issues de la chaîne n° 1 présentent un défaut, de même que 0,5 % des pièces issues de la chaîne n° 2 et 4 % des pièces issues de la chaîne n° 3.
On prélève au hasard un de ces composants. On note :

- C_1 l'évènement « le composant provient de la chaîne n° 1 » ;
- C_2 l'évènement « le composant provient de la chaîne n° 2 » ;
- C_3 l'évènement « le composant provient de la chaîne n° 3 » ;
- D l'évènement « le composant est défectueux »et $\overline{D}$ son évènement contraire.

Dans tout l'exercice, les calculs de probabilité seront donnés en valeur décimale exacte ou arrondie à 10^{-4} *si nécessaire.*

PARTIE A

1. Représenter cette situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que le composant prélevé provienne de la chaîne n° 3 et soit défectueux.
3. Montrer que la probabilité de l'évènement D est $P(D) = 0,0145$.
4. Calculer la probabilité qu'un composant défectueux provienne de la chaîne n° 3.

PARTIE B

L'entreprise décide de conditionner les composants produits en constituant des lots de n unités.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque lot de n unités, associe le nombre de composants défectueux de ce lot.
Compte tenu des modes de production et de conditionnement de l'entreprise, on peut considérer que X suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,0145$.

1. Dans cette question, les lots possèdent 20 unités. On pose $n = 20$.
   (a) Calculer la probabilité pour qu'un lot possède exactement trois composants défectueux.
   (b) Calculer la probabilité pour qu'un lot ne possède aucun composant défectueux.
   En déduire la probabilité qu'un lot possède au moins un composant défectueux.
2. Le directeur de l'entreprise souhaite que la probabilité de n'avoir aucun composant défectueux dans un lot de n composants soit supérieure à $0,85$.
   Il propose de former des lots de 11 composants au maximum. A-t-il raison ? Justifier la réponse.

PARTIE C

Les coûts de fabrication des composants de cette entreprise sont de 15 euros s'ils proviennent de la chaîne de montage n° 1, 12 euros s'ils proviennent de la chaîne de montage n° 2 et 9 euros s'ils proviennent de la chaîne de montage n° 3.
Calculer le coût moyen de fabrication d'un composant pour cette entreprise.

Exercice 6 : fonction exp, TVI et suites

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} - \mathrm{e}^{-x}$$

et l'on désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1. Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe $(\mathscr{C})$?
2. Calculer $f'(x)$, en déduire les variations de f pour x appartenant à $[0\ ;\ +\infty[$.
3. Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ en son point d'abscisse 0.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique u.
5. Montrer que u appartient à $[1\ ;\ 2]$ et déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-1} de u.

Partie B

n désigne un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{x-n}{x+n} - \mathrm{e}^{-x}.$$

1. Calculer $f_n'(x)$ et donner son signe sur $[0\ ;\ +\infty[$. Préciser $f_n(0)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$.
   Dresser le tableau de variations de f_n.
2. (a) Calculer $f_n(n)$; quel est son signe ?
   (b) Démontrer, par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathrm{e}^{n+1} > 2n+1$.
   En déduire le signe de $f_n(n+1)$.
   (c) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique sur $[n\ ;\ n+1]$; cette solution sera notée u_n.
3. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n}$.

Exercice 7 : probabilités discrètes

Dans un souci d'améliorer sa politique en matière de développement durable, une entreprise a réalisé une enquête statistique sur sa production de déchets.

Dans cette enquête, les déchets sont classés en trois catégories :

— 69 % des déchets sont minéraux et non dangereux ;

— 28 % des déchets sont non minéraux et non dangereux ;

— les déchets restants sont des déchets dangereux.

Cette enquête statistique nous apprend également que :

— 73 % des déchets minéraux et non dangereux sont recyclables ;

— 49 % des déchets non minéraux et non dangereux sont recyclables ;

— 35 % des déchets dangereux sont recyclables.

Les parties A *et* B *sont indépendantes et peuvent être traitées séparément.*

Partie A

Dans cette entreprise, on prélève au hasard un déchet. On considère les évènements suivants :

— M : « Le déchet prélevé est minéral et non dangereux » ;

— N : « Le déchet prélevé est non minéral et non dangereux » ;

— D : « Le déchet prélevé est dangereux » ;

— R : « Le déchet prélevé est recyclable ».

On note $\overline{R}$ l'évènement contraire de l'évènement R.

1. Faire un arbre modélisant la situation.
2. Justifier que la probabilité que le déchet soit dangereux et recyclable est égale à 0,0105.
3. Déterminer la probabilité $\mathbf{P}\left(M \cap \overline{R}\right)$ et interpréter la réponse obtenue dans le contexte de l'exercice.
4. Démontrer que la probabilité de l'évènement R est $\mathbf{P}(R) = 0,6514$.
5. On suppose que le déchet prélevé est recyclable.
   Déterminer la probabilité que ce déchet soit non minéral et non dangereux. *On donnera la valeur arrondie au dix-millième.*

Partie B

On rappelle que la probabilité qu'un déchet prélevé au hasard soit recyclable est égale à 0,6514.

1. Afin de contrôler la qualité de la collecte dans l'entreprise, on prélève un échantillon de 20 déchets pris au hasard dans la production. On suppose que le stock est suffisamment important pour assimiler le prélèvement de cet échantillon à un tirage avec remise.

   On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de déchets recyclables dans cet échantillon.

   (a) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.

   (b) Donner la probabilité que l'échantillon contienne exactement 14 déchets recyclables. *On donnera la valeur arrondie au dix-millième.*

2. Dans cette question, on prélève désormais n déchets, où n désigne un entier naturel strictement positif.

   (a) Donner l'expression en fonction de n de la probabilité p_n qu'aucun déchet de cet échantillon ne soit recyclable.

   (b) Déterminer la valeur de l'entier naturel n à partir de laquelle la probabilité qu'au moins un déchet du prélèvement soit recyclable est supérieure ou égale à 0,9999.

Exercice 8 : suites numériques

On étudie un groupe de 3000 sportifs qui pratiquent soit l'athlétisme dans le club A, soit le basket-ball dans le club B.

En 2023, le club A compte 1700 membres et le club B en compte 1300.

On décide de modéliser le nombre de membres du club A et du club B respectivement par deux suites (a_n) et (b_n), où n désigne le rang de l'année à partir de 2023.
L'année 2023 correspond au rang 0, on a alors $a_0 = 1700$ et $b_0 = 1300$.

Pour notre étude, on fait les hypothèses suivantes :
- durant l'étude, aucun sportif ne quitte le groupe ;
- chaque année, 15 % des sportifs du club A quittent ce club et adhèrent au club B ;
- chaque année, 10 % des sportifs du club B quittent ce club et adhèrent au club A.

1. Calculer les nombres de membres de chaque club en 2024.
2. Pour tout entier naturel n, déterminer une relation liant a_n et b_n.
3. Montrer que la suite (a_n) vérifie la relation suivante pour tout entier naturel n, on a :
$$a_{n+1} = 0,75a_n + 300.$$
4. (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a :
$$1200 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n \leqslant 1700.$$
   (b) En déduire que la suite (a_n) converge. *Le calcul de la limite n'est pas attendu.*
5. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = a_n - 1200$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
   (b) Exprimer v_n en fonction de n.
   (c) En déduire que pour tout entier naturel n, $a_n = 500 \times 0,75^n + 1200$.
6. (a) Déterminer la limite de la suite (a_n).
   (b) Interpréter le résultat de la question précédente dans le contexte de l'exercice.
7. (a) Compléter le programme Python afin qu'il renvoie la plus petite valeur de n à partir de laquelle le nombre de membres du club A est strictement inférieur à 1280.

```
def seuil() :
    n = 0
    A = 1700
    while ...... :
        n=n+1
        A = ......
    return......
```

   (b) Déterminer la valeur renvoyée lorsqu'on appelle la fonction seuil.