

Exercice 1**13 points****Partie 1.**

On considère l'équation différentielle

$$(E): y' + y = e^{-x}.$$

1. Démontrer que la fonction u définie sur l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels par $u(x) = xe^{-x}$ est une solution de (E).
2. Résoudre l'équation différentielle $(E_0): y' + y = 0$.
3. Démontrer qu'une fonction v , définie et dérivable sur \mathbb{R} , est solution de (E) si et seulement si $v - u$ est solution de (E_0) .
4. En déduire toutes les solutions de (E).
5. Déterminer la fonction f_2 , solution de (E), qui prend la valeur 2 en 0.

Partie 2.

k étant un nombre réel donné, on note f_k la fonction définie sur l'ensemble \mathbb{R} par :

$$f_k(x) = (x + k)e^{-x}.$$

On note \mathcal{C}_k la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Déterminer les limites de f_k en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Calculer $f'_k(x)$ pour tout réel x .
3. En déduire le tableau de variations de f_k .

Partie 3.

1. On considère la suite d'intégrales (I_n) définie par $I_0 = \int_{-2}^0 e^{-x} dx$ et pour tout entier naturel $n \geq 1$ par :

$$I_n = \int_{-2}^0 x^n e^{-x} dx$$

- (a) Calculer la valeur exacte de l'intégrale I_0 .
- (b) En utilisant une intégration par parties, démontrer l'égalité :

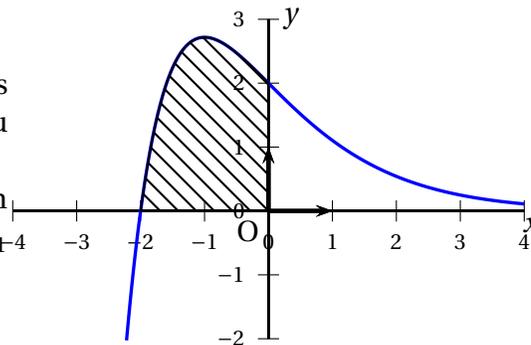
$$I_{n+1} = (-2)^{n+1} e^2 + (n+1)I_n.$$

- (c) En déduire les valeurs exactes des intégrales I_1 et I_2 .

2. Le graphique ci-dessous représente une courbe \mathcal{C}_k qui est la représentation graphique d'une fonction f_k définie à la partie B.

a. À l'aide des renseignements donnés par le graphique, déterminer la valeur du nombre réel k correspondant.

b. Soit \mathcal{S} l'aire de la partie hachurée (en unité d'aire); exprimer \mathcal{S} en fonction de I_{-4} et I_0 et en déduire sa valeur exacte.



Exercice 2

7 points

Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

Tous les résultats de calcul de probabilité seront donnés sous forme d'une fraction irréductible.

Une classe de terminale S d'un lycée compte 30 élèves dont 10 filles.

1. À chaque séance du cours de mathématiques, le professeur interroge au hasard trois élèves.

Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « Exactement deux des trois élèves interrogés sont des garçons »

B : « Les trois élèves interrogés sont de même sexe »

C : « Il y a au plus une fille parmi les trois élèves interrogés. »

2. Parmi les 19 internes de la classe, on compte 4 filles.

On choisit au hasard dans cette classe deux délégués de sexes différents.

Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

D : « Les deux délégués sont internes »

E : « Un seul de deux délégués est interne ».

3. À la fin de chaque séance le professeur désigne au hasard un élève qui effacera le tableau. Un même élève peut être désigné plusieurs fois.

(a) Déterminer la probabilité p_n pour que le tableau soit effacé au moins une fois par une fille à l'issue de n séances.

(b) Déterminer le nombre minimal de séances pour que $p_n > 0,9999$.