

★★☆☆☆ Exercice 1

/1.5

Soit la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 5u_n - 8n + 6 \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n ,

$$u_n = 5^n + 2n - 1$$

★★★☆☆ Exercice 2

/8.5

Les parties A et B sont indépendantes

Un site internet propose des jeux en ligne.

Partie A.

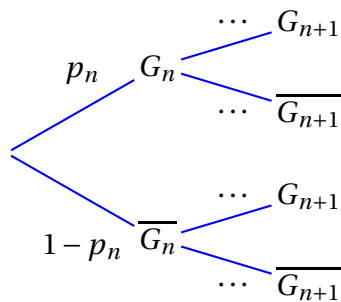
Pour un premier jeu :

- si l'internaute gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est égale à $\frac{2}{5}$.
- si l'internaute perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante est égale à $\frac{4}{5}$.

Pour tout entier naturel non nul n , on désigne par G_n l'évènement « l'internaute gagne la n -ième partie » et on note p_n la probabilité de l'évènement G_n .

L'internaute gagne toujours la première partie et donc $p_1 = 1$.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :



2. (a) Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{5}$.
(b) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul,

$$p_n \geq \frac{1}{4}$$

- (c) Conjecturer, à la calculatrice, la limite de la suite (p_n) .

3. Pour tout n entier naturel non nul, on pose $u_n = p_n - \frac{1}{4}$.

- (a) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme u_1 à préciser.

- (b) Déterminer, pour tout entier naturel n non nul, l'expression de u_n en fonction de n puis en déduire que $p_n = \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}$.

Partie B.

Dans un second jeu, le joueur doit effectuer 10 parties.

On suppose que toutes les parties sont indépendantes.

La probabilité de gagner chaque partie est égale à $\frac{1}{4}$.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par le joueur.

1. (a) On admet que X suit une loi binomiale.
Préciser les paramètres de cette loi.
- (b) Calculer la probabilité que le joueur gagne au moins une partie.
Le résultat sera arrondi à 10^{-2} près.
- (c) Déterminer l'espérance de X .
2. Le joueur doit payer 30 € pour jouer les 10 parties. Chaque partie gagnée lui rapporte 8 €. Calculer la probabilité pour un joueur de réaliser un bénéfice supérieur à 40 €. *Le résultat sera arrondi à 10^{-5} près.*