★☆☆☆☆ **Exercice 1** **5 points**

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} -2n^2+4n+5$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} 5\left(\dfrac{12}{13}\right)^n+200$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} 4n-\sqrt{n}$
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} 14^n+\cos(2n)$
5. $\lim\limits_{n\to+\infty} 2(-1)^n-n$

★★★☆☆ **Exercice 2** **8 points**

On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -\dfrac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Partie A : conjecture

1. Calculer les valeurs exactes, données en fractions irréductibles, de u_1 et u_2.
2. Donner une valeur approchée à 10^{-5} près des termes u_3 et u_4.
3. Conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite (u_n).

Partie B : validation des conjectures

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n, par :

$$v_n = u_n - 3.$$

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = -\dfrac{1}{2}v_n^2$.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $-1 \leqslant v_n \leqslant 0$.
3. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = -v_n\left(\dfrac{1}{2}v_n + 1\right)$.
   (b) En déduire le sens de variation de la suite (v_n).
4. Pourquoi peut-on alors affirmer que la suite (v_n) converge ?
5. On note ℓ la limite de la suite (v_n).
   On admet que ℓ appartient à l'intervalle $[-1\ ;\ 0]$ et vérifie l'égalité : $\ell = -\dfrac{1}{2}\ell^2$.
   Déterminer la valeur de ℓ.
6. Les conjectures faites dans la **partie A** sont-elles validées ?

★★☆☆☆ **Exercice 3** **7 points**

En tenant compte des contraintes du milieu naturel dans lequel évoluent les insectes, des biologistes modélisent le nombre d'insectes à l'aide de la suite (v_n), définie par :

$$v_0 = 0,3 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n,\ v_{n+1} = 1,6v_n - 1,6v_n^2,$$

où, pour tout entier naturel n, v_n est le nombre d'insectes, exprimé en millions, au bout de n mois.

1. Déterminer le nombre d'insectes au bout d'un mois.
2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{1}{2}\right]$ par

$$f(x) = 1,6x - 1,6x^2.$$

   (a) Résoudre l'équation $f(x) = x$.

   (b) Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{1}{2}\right]$.

3. (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$0 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{2}.$$

   (b) Montrer que la suite (v_n) est convergente.
   On note ℓ la valeur de sa limite. On admet que ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

   (c) Déterminer la valeur de ℓ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.