★★★☆☆ **Exercice 1**

ABC est un triangle équilatéral de côté 12 cm et I est le milieu du segment $[AB]$.
Pour tout $x \in \mathscr{D} = [0\,;3\sqrt{3}]$, on construit les points M, N, P et Q tels que :

— $M \in [AI]$ — $N \in [IB]$ — $P \in [IC]$ — $Q \in [IC]$

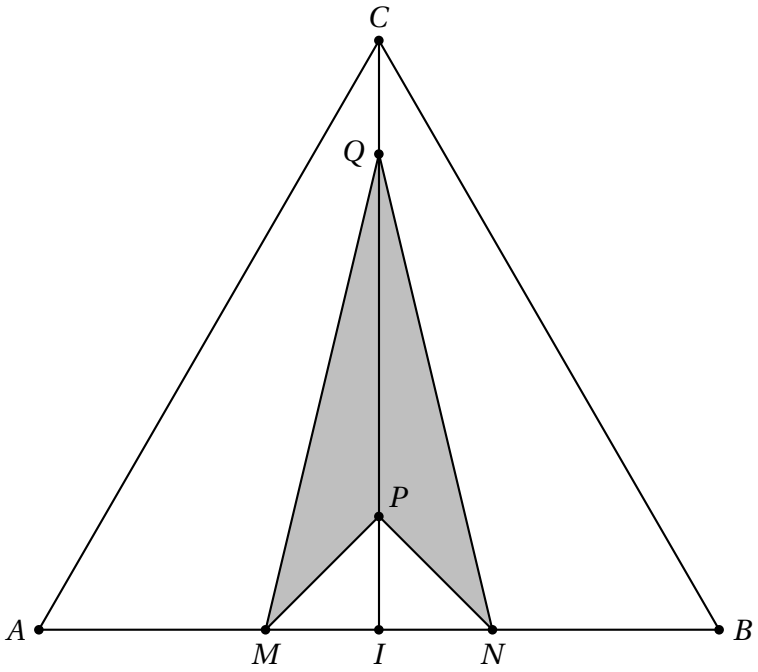
— $IM = IN = IP = CQ = x$.

On s'intéresse à l'aire du quadrilatère $MPNQ$ qu'on nommera $\mathscr{A}(x)$.

1. Montrer que $IC = 6\sqrt{3}$.
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathscr{D}$,

$$\mathscr{A}(x) = -2x^2 + 6\sqrt{3}x$$

3. Déterminer les éventuelles valeurs de $x \in \mathscr{D}$ telles que :
   (a) L'aire $\mathscr{A}(x)$ soit égale à 9 cm^2.
   (b) L'aire $\mathscr{A}(x)$ soit supérieure à 1 cm^2.
   (c) L'aire $\mathscr{A}(x)$ soit égale à la moitié de l'aire du triangle ABC.
4. Déterminer si $\mathscr{A}(x)$ admet un extremum sur $\mathscr{D}$ et si oui préciser sa nature, en quelle valeur il est atteint et sa valeur.
   Les valeurs exactes sont attendues.

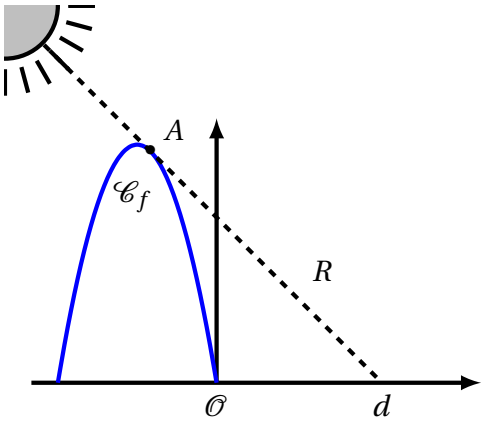


★★★☆☆ **Exercice 2**

Pour réaliser une installation, une artiste a besoin de savoir où sera projetée l'ombre d'une sculpture.

Elle souhaite savoir à quelle distance d sera projetée l'ombre de la sculpture à midi, début septembre, quand les rayons solaires auront une inclinaison de 45° (c'est-à-dire un coefficient directeur de -1).
Le problème est modélisé en deux dimensions sur le schéma ci-contre, où un repère orthonormé a été choisi avec pour origine la base de la sculpture. L'unité est de mètre. La sculpture peut-être représenté par la courbe de la fonction :

$$f : x \mapsto -2x^2 - 6x.$$



On appelle R la droite modélisant le rayon du soleil définissant la limite de l'ombre, et A le point d'intersection entre cette droite et la courbe. On remarque que R est la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A.

1. Soit a un réel quelconque.
   Calculer, à l'aide du taux d'accroissement, $f'(a)$.
2. Montrer l'unique solution de $f'(a) = -1$ est $a = -\frac{5}{4}$.
3. Montrer que l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $-\frac{5}{4}$ est $y = -x + \dfrac{25}{8}$.
4. Déterminer le point d'intersection de R et de l'axe des abscisses, et en déduire à quelle distance de la base de la sculpture arrivera l'ombre ce jour-là.

★★★☆☆ **Exercice 3**

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x^4 - 5x^2 - 3 = 0$ en posant au préalable $X = x^2$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $-2x + 7\sqrt{x} - 5 = 0$ en posant au préalable $X = \sqrt{x}$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{3x^2 + x + 1}{2 - x} \leqslant 0$

★★★☆☆ **Exercice 4**

Calculer la valeur de l'expression infinie $x = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}}$.
Aide : calculer x^2