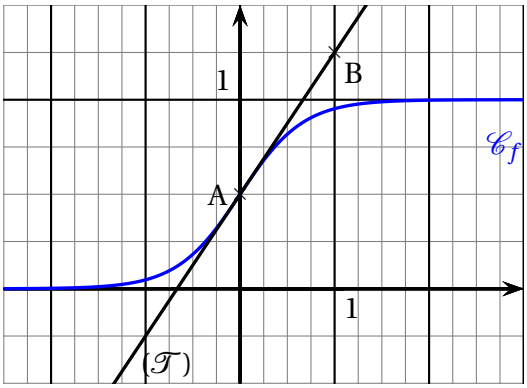
Exercice 1.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-3x}}$.

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

On nomme A le point de coordonnées $\left(0\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$ et B le point de coordonnées $\left(1\,;\,\dfrac{5}{4}\right)$.

On a tracé ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ et $(\mathscr{T})$ la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.



Partie A. Lectures graphiques

Dans cette partie, les résultats seront obtenus par lecture graphique.
Aucune justification n'est demandée.

1. Déterminer l'équation réduite de la tangente $(\mathscr{T})$.
2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction f semble convexe, semble concave.

Partie B. Étude de la fonction

1. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Déterminer l'expression de sa fonction dérivée f'.
2. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0{,}99$ admet une unique solution α dans $[0\,;2]$ puis déterminer une valeur approchée de α au centième.

Partie C. Tangente et convexité

1. Déterminer par le calcul une équation de la tangente $(\mathscr{T})$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

   On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
   On note f'' la fonction dérivée seconde de la fonction f.
   On admet que f'' est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f''(x) = \frac{9\mathrm{e}^{-3x}\left(\mathrm{e}^{-3x}-1\right)}{\left(1+\mathrm{e}^{-3x}\right)^3}.$$

2. Étudier le signe de la fonction f'' sur $\mathbb{R}$.
3. (a) Indiquer, en justifiant, sur quel(s) intervalle(s) la fonction f est convexe.
   (b) Que représente le point A pour la courbe $\mathscr{C}_f$?
   (c) En déduire la position relative de la tangente $(\mathscr{T})$ et de la courbe $\mathscr{C}_f$. Justifier la réponse.

Exercice 2.

Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{2}{u_n} - u_n^2 \end{cases}$$

1. Étudier les variations de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{2}{x} - x^2$, définie sur $]-\infty ; 1]$.
2. On admet que la suite (u_n) existe bien pour tout entier naturel n. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant -1$.
3. Déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, le signe de $x^3 + x^2 - 2$.
4. En déduire les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas minorée.

Exercice 3.

Pour tout entier naturel non nul $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par :

$$f_n(x) = x^n + x - 1.$$

Partie A. Étude des premiers cas et existence d'une solution

1. Déterminer l'expression de $f_1(x)$ et résoudre l'équation $f_1(x) = 0$ sur $[0 ; 1]$.
2. Résoudre l'équation $f_2(x) = 0$ sur $[0 ; 1]$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Étudier le sens de variation de la fonction f_n sur $[0 ; 1]$.
   (b) Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $[0 ; 1]$, que l'on notera α_n.
   (c) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n \in]0 ; 1[$.

Partie B. Étude de la suite (α_n)

1. (a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+1}(\alpha_n) = -(1-\alpha_n)^2$.
   (b) En déduire le sens de variation de la suite (α_n).
2. Démontrer que la suite (α_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
3. On suppose dans cette question que $\ell < 1$.
   (a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < \alpha_n^n \leq \ell^n$.
   (b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n^n$, puis aboutir à une contradiction.
   (c) Conclure sur la valeur de ℓ.