Exercices conseillés pour ces vacances

Exercice 1.

Dans le magasin d'Hugo, les clients peuvent louer deux types de vélos : vélos de route ou bien vélos tout terrain.
Chaque type de vélo peut être loué dans sa version électrique ou non.
On choisit un client du magasin au hasard, et on admet que :

— Si le client loue un vélo de route, la probabilité que ce soit un vélo électrique est de 0,4 ;

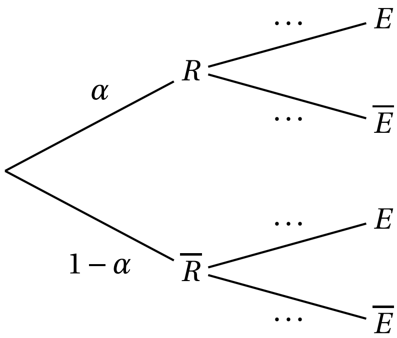
— Si le client loue un vélo tout terrain, la probabilité que ce soit un vélo électrique est de 0,7 ;

— La probabilité que le client loue un vélo électrique est de 0,58.

On appelle α la probabilité que le client loue un vélo de route, avec $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.
On considère les évènements suivants :

- R : « le client loue un vélo de route » ;
- E : « le client loue un vélo électrique » ;
- $\overline{R}$ et $\overline{E}$, évènements contraires de R et E.

On modélise cette situation aléatoire à l'aide de l'arbre reproduit ci-contre :



1. Compléter cet arbre.
2. (a) Montrer que $\mathbf{P}(E) = 0,7 - 0,3\alpha$.
   (b) En déduire que : $\alpha = 0,4$.
3. On sait que le client a loué un vélo électrique.
   Déterminer la probabilité qu'il ait loué un vélo tout terrain. On donnera le résultat arrondi au centième.
4. Quelle est la probabilité que le client loue un vélo tout terrain électrique ?
5. Le prix de la location à la journée d'un vélo de route non électrique est de 25 euros, celui d'un vélo tout terrain non électrique de 35 euros.
   Pour chaque type de vélo, le choix de la version électrique augmente le prix de location à la journée de 15 euros.
   On appelle X la variable aléatoire modélisant le prix de location d'un vélo à la journée.
   (a) Donner la loi de probabilité de X. On présentera les résultats sous forme d'un tableau.

(b) Calculer l'espérance mathématique de X et interpréter ce résultat.

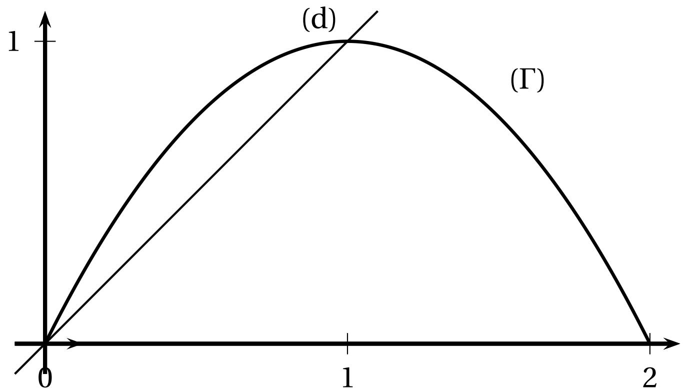
6. Lorsqu'on choisit 30 clients d'Hugo au hasard, on assimile ce choix à un tirage avec remise.
   On note Y la variable aléatoire associant à un échantillon de 30 clients choisis au hasard le nombre de clients qui louent un vélo électrique.
   On rappelle que la probabilité de l'événement E est : $\mathbf{P}(E) = 0,58$.
   (a) Justifier que Y suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
   (b) Déterminer la probabilité qu'un échantillon contienne exactement 20 clients qui louent un vélo électrique. On donnera le résultat arrondi au millième.
   (c) Déterminer la probabilité qu'un échantillon contienne au moins 15 clients qui louent un vélo électrique. On donnera le résultat arrondi au millième.

Exercice 2. On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = a, \text{ et, pour tout entier } n,\ u_{n+1} = u_n\,(2 - u_n)$$

où a est un réel donné tel que $0 < a < 1$.

1. On suppose dans cette question que $a = \frac{1}{8}$
   (a) Calculer u_1 et u_2.
   (b) On a représenté la droite (d) d'équation $y = x$ et la courbe (Γ) représentative de la fonction : $f\ : x \mapsto x(2-x)$.
   Utiliser (d) et (Γ) pour construire sur l'axe des abscisses les points A_1, A_2, A_3 d'abscisses respectives $u_1,\ u_2,\ u_3$.



2. On suppose dans cette question que a est un réel quelconque de l'intervalle $]0\,;1[$.
   (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier $n,\ 0 < u_n < 1$.
   (b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
   (c) Que peut-on en déduire ?
3. On suppose à nouveau dans cette question que $a = \frac{1}{8}$.
   On considère la suite numérique (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$v_n = 1 - u_n.$$

   (a) Exprimer, pour tout entier $n,\ v_{n+1}$ en fonction de v_n.
   (b) En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
   (c) Déterminer la limite de la suite (v_n), puis celle de la suite (u_n).

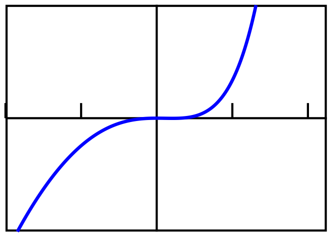
Exercice 3.

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 e^{x-1} - \frac{x^2}{2}.$$

Le graphique ci-dessous est la courbe représentative de cette fonction telle que l'affiche une calculatrice dans un repère orthonormal.

Conjectures
À l'observation de cette courbe, quelles conjectures pensez-vous pouvoir faire concernant
a. le sens de variations de f sur $[-3\,;\ 2]$?
b. la position de la courbe par rapport à l'axe $(x'x)$?

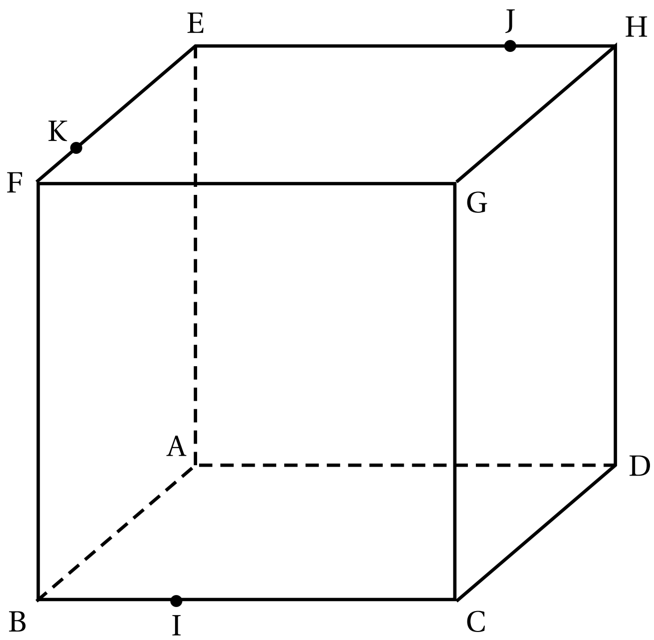


Dans la suite de ce problème, on se propose de valider ou non la première conjecture.

1. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x, et l'exprimer à l'aide de l'expression $g(x)$ où g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x+2)e^{x-1} - 1$.
2. Étude du signe de $g(x)$ pour x réel.
   (a) Calculer les limites de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$, puis quand x tend vers $-\infty$.
   (b) Calculer $g'(x)$ et étudier son signe suivant les valeurs de x.
   (c) En déduire le sens de variations de la fonction g, puis dresser son tableau de variations.
   (d) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}$. On note α cette solution. Montrer que $0,20 < \alpha < 0,21$.
   (e) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
3. Sens de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   (a) Étudier, suivant les valeurs de x, le signe de $f'(x)$.
   (b) En déduire le sens de variations de la fonction f.
   (c) Que pensez-vous de votre première conjoncture ?

Exercice 4.

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1.
On se place dans le repère orthonormal $\left(\mathrm{A}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{AD}}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.
On considère les points $\mathrm{I}\left(1\,;\,\frac{1}{3}\,;\,0\right)$, $\mathrm{J}\left(0\,;\,\frac{2}{3}\,;\,1\right)$, $\mathrm{K}\left(\frac{3}{4}\,;\,0\,;\,1\right)$ et $\mathrm{L}(a\,;\,1\,;\,0)$ avec a un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$.



Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (IJ).
2. Démontrer qu'une représentation paramétrique de la droite (KL) est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \frac{3}{4}+t'\left(a-\frac{3}{4}\right) \\ y & = & t' \\ z & = & 1-t' \end{array}\right. , \; t'\in\mathbb{R}$$

3. Démontrer que les droites (IJ) et (KL) sont sécantes si, et seulement si, $a=\dfrac{1}{4}$.

Partie B

Dans la suite de l'exercice, on pose $a=\frac{1}{4}$.
Le point L a donc pour coordonnées $\left(\frac{1}{4}\,;\,1\,;\,0\right)$.

1. Démontrer que le quadrilatère IKJL est un parallélogramme.
2. Construire la section du cube par le plan (IJK).

Exercice 5.

Pour réaliser une enquête, un employé interroge des personnes prises au hasard dans une galerie commerçante. Il se demande si trois personnes au moins accepteront de répondre.

1. Dans cette question, on suppose que la probabilité qu'une personne choisie au hasard accepte de répondre est 0,1. L'employé interroge 50 personnes de manière indépendante. On considère les évènements :

   A : « au moins une personne accepte de répondre »

   B : « moins de trois personnes acceptent de répondre »

   C : « trois personnes ou plus acceptent de répondre ».

   Calculer les probabilités des évènements A, B et C. On arrondira au millième.

2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. Dans cette question, on suppose que la variable aléatoire X qui, à tout groupe de n personnes interrogées indépendamment, associe le nombre de personnes ayant accepté de répondre, suit la loi de probabilité définie par :

$$\begin{cases} \text{Pour tout entier } k \text{ tel que } 0 \leqslant k \leqslant n-1,\ P(X=k) = \dfrac{\mathrm{e}^{-a}a^k}{k!} \\ \text{et } P(X=n) = 1 - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{\mathrm{e}^{-a}a^k}{k!}, \\ \text{formules dans lesquelles } a = \dfrac{n}{10} \end{cases}$$

   (a) Montrer que la probabilité qu'au moins trois personnes répondent est donnée par :

$$f(a) = 1 - \mathrm{e}^{-a}\left(1 + a + \frac{a^2}{2}\right).$$

   (b) Calculer $f(5)$. En donner l'arrondi au millième. Cette modélisation donne-t-elle un résultat voisin de celui obtenu à la question 1 ?

3. On conserve le modèle de la question 2. On souhaite déterminer le nombre minimum de personnes à interroger pour que la probabilité que trois d'entre elles au moins répondent soit supérieure ou égale à 0,95.

   (a) Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right).$$

   ainsi que sa limite en $+\infty$. Dresser son tableau de variations.

   (b) Montrer que l'équation $f(x) = 0,95$ admet une solution unique sur $\mathbb{R}^+$, et que cette solution est comprise entre $6,29$ et $6,3$.

   (c) En déduire le nombre minimum de personnes à interroger.

Exercice 6.

Le but de l'exercice est de montrer que l'équation (E) : $e^x = \frac{1}{x}$, admet une unique solution dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, et de construire une suite qui converge vers cette unique solution.

I. Existence et unicité de la solution

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - e^{-x}$.

1. Démonter que x est solution de l' équation (E) si et seulement si $f(x) = 0$.
2. Étude du signe de la fonction f
   (a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
   (b) Étudier le sens de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ puis dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.
   (c) En déduire que l'équation (E) possède une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée α.
   (d) Démontrer que α appartient à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\ ;\ 1\right]$.
   (e) Étudier le signe de f sur l'intervalle $[0\ ;\ \alpha]$.

II. Deuxième approche

On note g la fonction définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par : $g(x) = \frac{1+x}{1+e^x}$.

1. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à
   l'équation $g(x) = x$.
2. En déduire que α est l'unique réel vérifiant : $g(\alpha) = \alpha$.
3. Calculer $g'(x)$ et en déduire que la fonction g est croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ \alpha]$.

III. Construction d'une suite de réels ayant pour limite α

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, par : $u_{n+1} = g(u_n)$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$$

2. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
3. Justifier l'égalité : $g(\ell) = \ell$. En déduire la valeur de ℓ.
4. À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de u_4 arrondie à la sixième décimale.

Exercice 7.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 2x + 3.$$

1. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire, que pour tout x appartenant à l'intervalle $\left[\frac{4}{3}\ ;\ 2\right]$, $f(x)$ appartient à l'intervalle $\left[\frac{4}{3}\ ;\ 2\right]$.
3. Démontrer que pour tout x réel, $x \leqslant f(x)$.
   Pour cela, on pourra démontrer que pour tout réel x :
   $$f(x) - x = \frac{3}{4}(x-2)^2.$$

On considère la suite (u_n) définie par un réel u_0 et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

On a donc, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n^2 - 2u_n + 3.$$

4. Étude du cas : $\frac{4}{3} \leqslant u_0 \leqslant 2$.
   (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,
   $$u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2.$$
   (b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
   (c) Prouver que la limite de la suite est égale à 2.
5. Étude du cas particulier : $u_0 = 3$.
   On admet que dans ce cas la suite (u_n) tend vers $+\infty$.
   Recopier et compléter la fonction « `seuil` » suivante écrite en Python, afin qu'elle renvoie la plus petite valeur de n telle que u_n soit supérieur ou égal à 100.

```
def seuil() :
  u = 3
  n = 0
  while ...
      u = ...
      n = ...
  return n
```

6. Étude du cas : $u_0 > 2$.
   À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, montrer que (u_n) n'est pas convergente.