

Exercice 1.**Partie A.**

Le but de la partie A est d'étudier le comportement de la suite (u_n) définie par $u_0 = 0,3$ et par la relation de récurrence, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 2u_n(1 - u_n).$$

Cette relation de récurrence s'écrit $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x(1 - x).$$

1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.

2. On admet que pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$.

Calculer u_1 puis effectuer un raisonnement par récurrence pour démontrer que pour tout entier naturel n :

$$u_n \leq u_{n+1}$$

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4. Soit ℓ la limite de la suite (u_n) .

Calculer cette limite.

Partie B.

Le but de cette partie est d'étudier un modèle d'évolution d'une population.

En 2022, cette population compte 3000 individus.

On note P_n l'effectif en milliers de la population l'année 2022 + n . Ainsi $P_0 = 3$.

Selon un modèle inspiré du modèle de Verhulst, mathématicien belge du XIX^e siècle, on considère que, pour tout entier naturel n :

$$P_{n+1} - P_n = P_n(1 - b \times P_n), \text{ où } b \text{ est un réel strictement positif.}$$

Le réel b est un facteur de freinage qui permet de tenir compte du caractère limité des ressources du milieu dans lequel évoluent ces individus.

1. Dans cette question $b = 0$.

(a) Justifier que la suite (P_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

(b) Déterminer la limite de P_n en la justifiant.

2. Dans cette question $b = 0,2$.

(a) Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = 0,1 \times P_n$.

Calculer v_0 puis montrer que, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = 2v_n(1 - v_n)$.

(b) Dans ce modèle, justifier que la population se stabilisera autour d'une valeur que l'on précisera.

Exercice 2.

Une plateforme informatique propose deux types de jeux vidéo : un jeu de type A et un jeu de type B .

On admet que, dès que le joueur achève une partie, la plateforme lui propose une nouvelle partie selon le modèle suivant :

- si le joueur achève une partie de type A , la plateforme lui propose de jouer à nouveau une partie de type A avec une probabilité de 0,8;
- si le joueur achève une partie de type B , la plateforme lui propose de jouer à nouveau une partie de type B avec une probabilité de 0,7.

Pour un entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note A_n et B_n les événements :

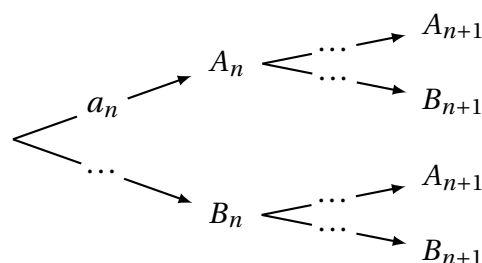
A_n : «la n -ième partie est une partie de type A .»

B_n : «la n -ième partie est une partie de type B .»

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note a_n la probabilité de l'événement A_n .

1. (a) Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre
- (b) Montrer que pour tout entier naturel n non nul on a :

$$a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3$$



Dans la suite de l'exercice, on note a la probabilité que le joueur joue au jeu A lors de sa première partie, où a est un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0 ; 1]$. La suite (a_n) est donc définie par : $a_1 = a$, et pour tout entier naturel $n \geq 1$, $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3$.

2. *Étude d'un cas particulier.* Dans cette question, on suppose que $a = 0,5$.

- (a) Montrer par récurrence, que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $0 \leq a_n \leq 0,6$.
- (b) Montrer que la suite (a_n) est croissante.

3. *Étude du cas général.* Dans cette question, le réel a appartient à l'intervalle $[0 ; 1]$.

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par $u_n = a_n - 0,6$.

- (a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique.
- (b) En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $a_n = (a - 0,6) \times 0,5^{n-1} + 0,6$.

Exercice 3.

Calculez les limites suivantes :

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} n - \sqrt{n}$
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + (-1)^n}{\sqrt{n}}$
3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 - 2 \cos(n^2)$
4. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n^2}{n^2 + 6n + 3}$
5. $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4 \sin(n^2) - n$
6. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n}{3^n + 1}$
7. $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4^n - 5^n$
8. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

Exercice 4.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n , par :

$$u_{n+1} = 5u_n - 4n - 3.$$

1. (a) Démontrer que $u_1 = 12$.
(b) Déterminer u_2 en détaillant le calcul.
(c) La copie d'écran ci-dessous présente les valeurs, calculées à l'aide d'un tableur, des termes de la suite (u_n) pour n variant de 0 à 6.

n	u_n
0	3
1	12
2	53
3	256
4	1255
5	6256
6	31257

Conjecturer le sens de variation ainsi que la limite de la suite (u_n) .

2. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n \geq n + 1.$$

- (b) En déduire la limite de la suite (u_n) .

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = u_n - n - 1.$$

- (a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
Donner sa raison et son premier terme v_0 .
 - (b) En déduire, pour tout entier naturel n , l'expression de v_n en fonction de n .
 - (c) En déduire que pour tout entier naturel n :

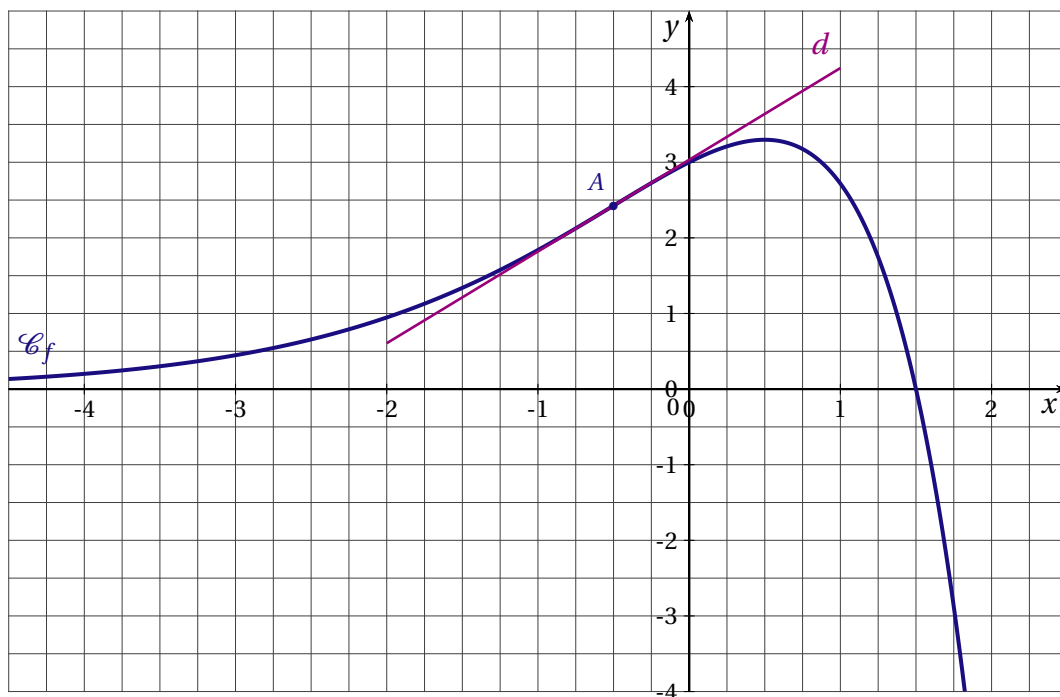
$$u_n = 2 \times 5^n + n + 1.$$

- (d) En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

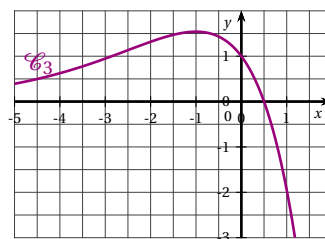
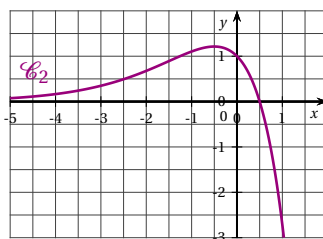
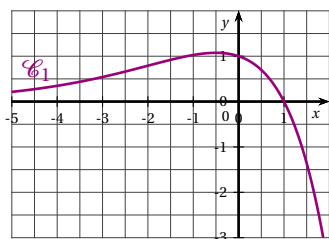
Exercice 5.

On a tracé ci-dessous, la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

La droite d est la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse $\left(-\frac{1}{2}\right)$.



1. Parmi les trois courbes données ci-dessous, une seule est la représentation graphique de la dérivée de la fonction f : laquelle? Justifier la réponse.



2. La fonction f est définie pour tout réel x , par $f(x) = (3 - 2x)e^x$.
 - (a) On note f' la dérivée de la fonction f .
Vérifier que pour tout réel x on a $f'(x) = (1 - 2x)e^x$.
 - (b) Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
 - (c) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
3.
 - (a) Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$.
 - (b) Démontrer que $\mathcal{C}_f$ possède un unique point d'inflexion dont vous préciserez les coordonnées.