Jour 1 : intégration, calcul d'aire

PARTIE A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

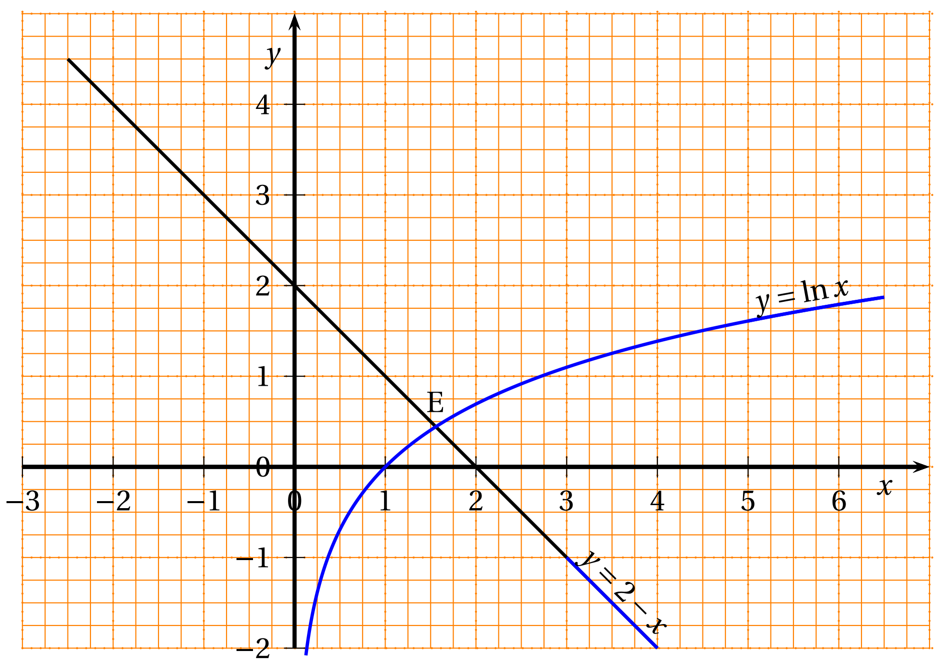
$$f(x) = \ln x - 2 + x.$$

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
2. Étudier le sens de variation de la fonction f puis dresser son tableau de variations.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   Donner un encadrement du nombre α à 10^{-2} près.

PARTIE B

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

On considère sur le graphique ci-dessous, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction ln, ainsi que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 2 - x$. On note E le point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$.



On considère l'aire en unités d'aire, notée $\mathscr{A}$, de la partie du plan située au dessus de l'axe des abscisses et au dessous de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$.

1. Calculer les coordonnées du point E.
2. Soit $I = \displaystyle\int_1^{\alpha} \ln x\,\mathrm{d}x$.
   a. Donner une interprétation géometrique de I.
   b. Démontrer que la fonction F définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $F(x) = x(\ln(x) - 1)$ est une primitive de ln sur $]0\ ;\ +\infty[$. En déduire la valeur de I, en fonction de α.
   c. Montrer que I peut aussi s'écrire $I = -\alpha^2 + \alpha + 1$ sachant que $f(\alpha) = 0$.
3. Calculer l'aire $\mathscr{A}$ en fonction de α.