Jour 11 : probabilités et aire

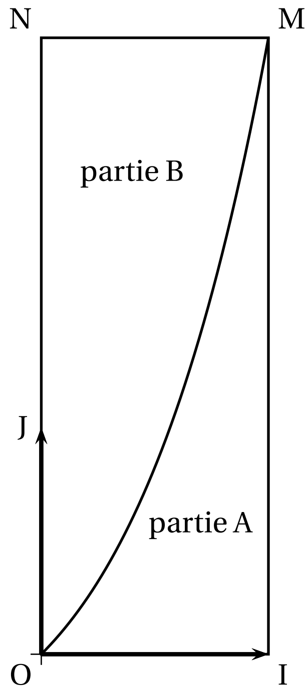
1. Première partie

Calculer l'intégrale $\int_0^1 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

2. Deuxième partie

La figure ci-dessous représente une cible rectangulaire OIMN telle que, dans le repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{OI}}\,,\,\overrightarrow{\mathrm{OJ}}\right)$, la ligne courbe $\mathscr{C}$ reliant le point O au point M est une partie de la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^x$. Cette courbe partage la cible OIMN en deux parties A et B comme l'indique la figure ci-dessous.

Un jeu consiste à lancer une fléchette qui atteint soit l'extérieur de la cible, soit l'une des parties A ou B. On admet que la fléchette ne peut atteindre aucune des frontières de la cible, ni la courbe $\mathscr{C}$.



Une étude statistique a montré que la fléchette tombe à l'extérieur de la cible avec une probabilité de $\frac{1}{2}$ et que les probabilités d'atteindre les parties A et B sont proportionnelles à leurs aires respectives.

1. Démontrer que la probabilité d'atteindre la partie A est égale à $\frac{1}{2\mathrm{e}}$.

Quelle est la probabilité d'atteindre la partie B ?

2. On lance de manière indépendante trois fléchettes.

a. Soit X la variable aléatoire qui est égale au nombre de fléchettes ayant atteint la partie A. Définir la loi de probabilité de X. En déduire la valeur exacte de son espérance mathématique.

b. Soit E l'évènement : « Exactement deux fléchettes atteignent la partie A ». Calculer une valeur approchée au millième de la probabilité de E.

c. Soit F l'évènement : « les trois fléchettes atteignent la partie B ». Calculer la probabilité de F (on donnera la valeur exacte).

Sachant qu'aucune fléchette n'a atteint l'extérieur de la cible, quelle est la probabilité que toutes les trois se trouvent dans la partie B ?

3. On lance cette fois de manière indépendante n fléchettes.

a. Déterminer en fonction de n la probabilité p_n pour qu'au moins une des fléchettes atteigne la partie A.

b. Déterminer le plus petit naturel n tel que $p_n \geqslant 0,99$.