

## Jour 12 : probabilités et suites

Avant le début des travaux de construction d'une autoroute, une équipe d'archéologie préventive procède à des sondages successifs en des points régulièrement espacés sur le terrain.

Lorsque le  $n$ -ième sondage donne lieu à la découverte de vestiges, il est dit positif.

L'évènement : « le  $n$ -ième sondage est positif » est noté  $V_n$ , on note  $p_n$  la probabilité de l'évènement  $V_n$ .

L'expérience acquise au cours de ce type d'investigation permet de prévoir que :

- si un sondage est positif, le suivant a une probabilité égale à 0,6 d'être aussi positif;
- si un sondage est négatif, le suivant a une probabilité égale à 0,9 d'être aussi négatif.

On suppose que le premier sondage est positif, c'est-à-dire :  $p_1 = 1$ .

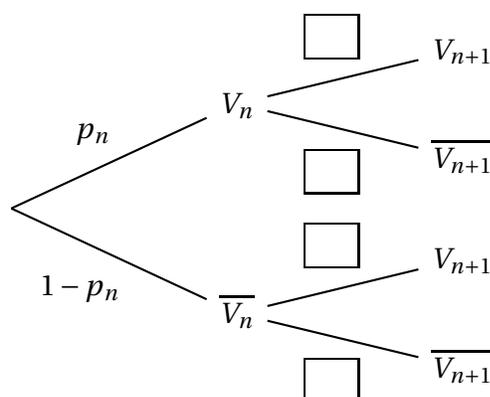
1. Calculer les probabilités des évènements suivants :

- a.  $A$  : « les 2<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup> sondages sont positifs »;
- b.  $B$  : « les 2<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup> sondages sont négatifs ».

2. Calculer la probabilité  $p_3$  pour que le 3<sup>e</sup> sondage soit positif.

3.  $n$  désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Compléter l'arbre ci-dessous en fonction des données de l'énoncé :



4. Pour tout entier naturel  $n$  non nul, établir que :  $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,1$ .

5. a. Démontrer que la suite  $(p_n)$  est minorée par 0,2.

b. Démontrer que la suite  $(p_n)$  est décroissante.

c. Démontrer que la suite  $(p_n)$  est convergente et calculer sa limite  $\ell$ .

6. On note  $u$  la suite définie, pour tout entier naturel  $n$  non nul par :  $u_n = p_n - 0,2$ .

a. Démontrer que  $u$  est une suite géométrique, en préciser le premier terme et la raison.

b. Exprimer  $p_n$  en fonction de  $n$ .

c. Calculer la limite, quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , de la probabilité  $p_n$  et retrouver le résultat de la question 5.c.