Jour 13 : logarithme et aire

On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = 1 + x\ln x.$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal (O ; I, J)
Toutes les aires considérées dans ce problème seront exprimées en unités d'aire.

Partie A

Le but de cette partie est de déterminer un encadrement de l'aire $\mathscr{A}$ du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_f$, et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

On note M et N les points de $\mathscr{C}_f$ d'abscisses respectives 1 et 2, P et Q leurs projetés orthogonaux respectifs sur l'axe des abscisses. La figure est donnée en annexe.

1. **a.** Montrer que f est positive sur $[1\,;2]$.

   b. Montrer que le coefficient directeur de la droite (MN) est $2\ln 2$.

   c. Soit E le point d'abscisse $\dfrac{4}{\mathrm{e}}$.
   Montrer que, sur l'intervalle $[1\,;2]$, le point E est l'unique point de $\mathscr{C}_f$ en lequel la tangente à $\mathscr{C}_f$ est parallèle à (MN).

   d. On appelle T la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point E.
   Montrer qu'une équation de T est : $y = (2\ln 2)x - \dfrac{4}{\mathrm{e}} + 1$.

   e. Démontrer que $\mathscr{C}_f$ est toujours située au dessus de T sur $[1\,;2]$

2. Soient M′ et N′ les points d'abscisses respectives 1 et 2 de la droite T. On admet que la courbe $\mathscr{C}_f$ reste sous la droite (MN) sur l'intervalle $[1\,;2]$ et que les points M′ et N′ ont des ordonnées strictement positives.

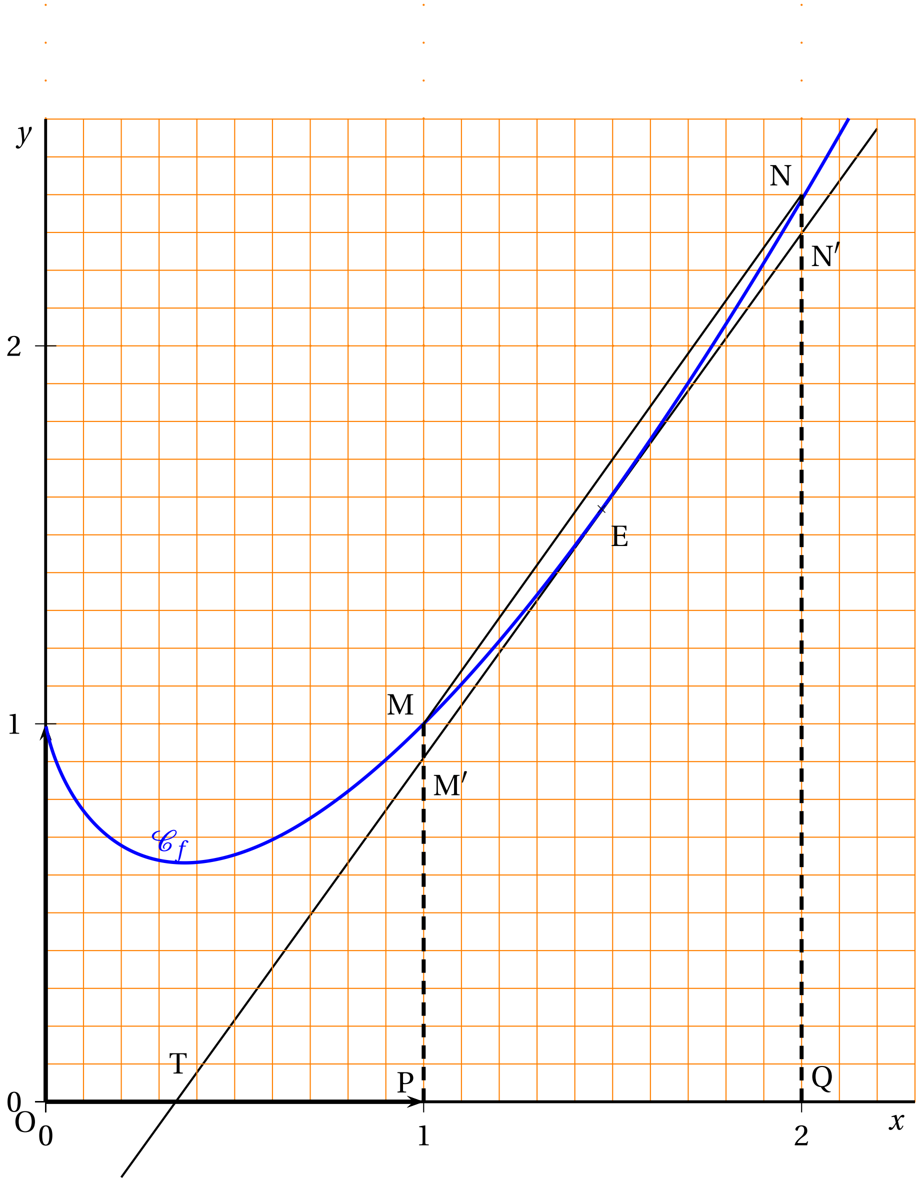
   a. Calculer les aires des trapèzes MNQP et M′N′QP.

   b. En déduire, à l'aide de la calculatrice, un encadrement de $\mathscr{A}$ d'amplitude 10^{-1}.

Partie B

Le but de cette partie est de déterminer la valeur exacte de $\mathscr{A}$.

1. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_1^2 x\ln x\,\mathrm{d}x$.
2. En déduire la valeur exacte de $\mathscr{A}$.



y
2
1
0
O
0
1
2
x
N
N′
E
M
M′
$\mathscr{C}_f$
T
P
Q