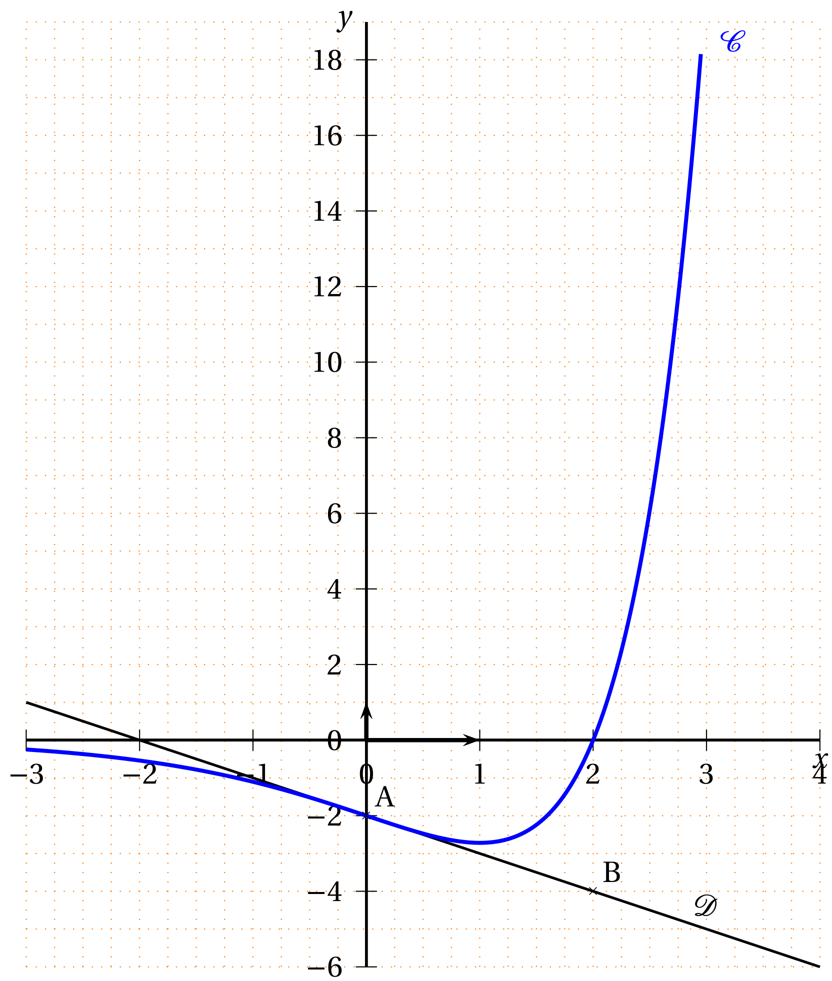
Jour 4 : exp *et intégrale*

Partie A.

Dans le plan muni d'un repère orthogonal, la courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous représente une fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

La tangente $\mathscr{D}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point A$(0\ ;\ -2)$ passe par le point B$(2\ ;\ -4)$.



On désigne par f' la fonction dérivée de f.

1. **a.** Donner la valeur de $f(0)$.

   b. Justifier que : $f'(0) = -1$.

2. **a.** On admet qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout réel x,
   $f(x) = (x+a)\mathrm{e}^{bx}$.
   Vérifier que pour tout réel x, $f'(x) = (bx + ab + 1)\mathrm{e}^{bx}$.

   b. Utiliser les résultats précédents pour déterminer les valeurs exactes des réels a et b.

Partie B.

On considère maintenant la fonction f définie pour tout réel x par

$$f(x) = (x-2)\mathrm{e}^{x}.$$

1. Donner l'expression de $f'(x)$ pour tout réel x ; en déduire le sens de variation de la fonction f sur l'ensemble des réels $\mathbb{R}$.
2. **a.** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

   b. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.
3. Démontrer que le point A est l'unique point d'inflexion de la courbe représentative de la fonction f.
4. **a.** À l'aide d'une interprétation par parties, calculer $\displaystyle\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

   b. Préciser le signe de $f(x)$ pour tout x de l'intervalle $[2\,;\,3]$.

   c. Calculer la valeur, en unités d'aire, de l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=2$ et $x=3$.