

Jour 5 : équations différentielles et étude de fonction

Partie 1. Équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(E): \quad y' + y = 2e^x - x - 1.$$

1. Démontrer que la fonction g définie sur l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels par $g(x) = e^x - x + 2e^{-x}$ est une solution de (E).
2. Résoudre l'équation différentielle $(E_0): \quad y' + y = 0$.
3. Déduire des questions précédentes toutes les solutions de (E).

Partie 2. Étude de la fonction g

1. Calculer les limites de g en :
 - a. $-\infty$
 - b. $+\infty$
2. Démontrer que pour tout réel x on a $e^{2x} - e^x - 2 = (e^x - 2)(e^x + 1)$.
3. Calculer la dérivée de g puis en utilisant la question 1 de cette partie, donner une expression factorisée de $g'(x)$.
4. En déduire le tableau de variation complet de g sur \mathbb{R} .