Jour 8 : ln *et intégrale*

1. On considère la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = \ln x - \frac{2}{x}$$

On donne ci-dessous le tableau de variations de g.

x	0	$2{,}3$ $\quad x_0 \quad$ $2{,}4$	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	$+\infty$

Démontrer toutes les propriétés de la fonction g regroupées dans ce tableau.

2. Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{5\ln x}{x}$$

a. Montrer que $f(x_0) = \dfrac{10}{x_0^2}$ où x_0 est le réel apparaissant dans le tableau ci-dessus.

b. Soit a un réel. Pour $a > 1$, exprimer $\displaystyle\int_1^a f(t)\,\mathrm{d}t$ en fonction de a.

3. On a tracé dans le repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ ci-dessous les courbes représentatives des fonctions f et g notées respectivement $\left(\mathscr{C}_f\right)$ et $\left(\mathscr{C}_g\right)$.

On appelle I le point de coordonnées $(1\,;\,0)$, P_0 le point d'intersection de $\left(\mathscr{C}_g\right)$ et de l'axe des abscisses, M_0 le point de $\left(\mathscr{C}_f\right)$ ayant même abscisse que P_0 et H_0 le projeté orthogonal de M_0 sur l'axe des ordonnées.

On nomme $(\mathscr{D}_1)$ le domaine du plan délimité par la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ et les segments $[\mathrm{I}P_0]$ et $[P_0M_0]$.

On nomme $(\mathscr{D}_2)$ le domaine du plan délimité par le rectangle construit à partir de [OI] et $[\mathrm{O}H_0]$.

Démontrer que les deux domaines $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ ont même aire, puis donner un encadrement d'amplitude 0,2 de cette aire.