Jour 9 : ln *et intégrale*

Partie A

Soit f la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1+2\ln x}{x^2}.$$

Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f et soit $(\mathscr{C}')$ celle de la fonction h définie sur $]0~;~+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{1}{x}$.

1. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. En déduire que $(\mathscr{C})$ a deux asymptotes que l'on déterminera.

2. Calculer la dérivée f' de f et étudier les variations de f.

3. Soit I le point d'intersection de $(\mathscr{C})$ avec l'axe des abscisses. Déterminer les coordonnées de I.

4. Pour tout x de $]0~;~+\infty[$, on pose $g(x) = 1 - x + 2\ln x$.

a. Étudier les variations de la fonction g.

b. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique dans chacun des intervalles $]0\,;2[$ et $]2\,;4[$. Soit α la solution appartenant à $]2\,;4[$. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

5. a. Montrer que $f(x) - \dfrac{1}{x} = \dfrac{g(x)}{x^2}$ et en déduire que $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ se coupent en deux points.

b. Montrer que, pour tout réel x supérieur ou égal à 4, la double inégalité suivante est vraie :

$$0 < f(x) \leqslant \frac{1}{x}.$$

Partie B

1. Soit $\mathscr{D}$ la partie du plan définie par les inégalités suivantes :

$$\begin{cases} 1 \leqslant \ x \ \leqslant \alpha & (\alpha \quad \text{est le réel défini dans la partie A}) \\ 0 \leqslant \ y \ \leqslant f(x) & \end{cases}$$

a. Montrer que la fonction F définie sur $]0\,;+\infty[$ par $F(x) = \dfrac{-2\ln(x) - 3}{x}$ est une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.

b. Montrer que l'aire de $\mathscr{D}$, notée $\mathscr{A}(\alpha)$, peut s'écrire sous la forme $\mathscr{A}(\alpha) = 2 - \dfrac{2}{\alpha}$ et donner une valeur approchée de $\mathscr{A}(\alpha)$ à 10^{-2} près.

2. Soit la suite (I_n) définie pour n supérieur ou égal à 1 par :

$$I_n = \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

a. Montrer que, pour tout n supérieur ou égal à 4, la double inégalité suivante est vraie :

$$0 \leqslant I_n \leqslant \ln\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

b. En déduire que la suite (I_n) converge et déterminer sa limite.

c. Soit $S_n = \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 + \mathrm{I}_3 + \cdots + I_n$. Calculer S_n puis la limite de la suite (S_n).