Exercice 1. Un jeu vidéo récompense par un objet tiré au sort les joueurs ayant remporté un défi. L'objet tiré peut être « commun » ou « rare ». Deux types d'objets communs ou rares sont disponibles, des épées et des boucliers.
Les concepteurs du jeu vidéo ont prévu que :

— la probabilité de tirer un objet rare est de 7 % ;

— si on tire un objet rare, la probabilité que ce soit une épée est de 80 % ;

— si on tire un objet commun, la probabilité que ce soit une épée est de 40 %.

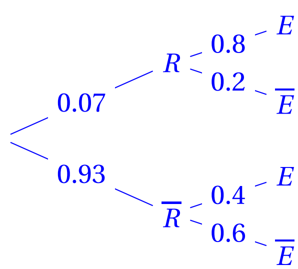
Les parties A *et* B *sont indépendantes.*

Partie A

Un joueur vient de remporter un défi et tire au sort un objet. On note :

- R l'évènement « le joueur tire un objet rare » ;
- E l'évènement « le joueur tire une épée » ;
- $\overline{R}$ et $\overline{E}$ les évènements contraires des évènements R et E.

1. Dresser un arbre pondéré modélisant la situation, puis calculer $P(R \cap E)$.
Voici l'arbre pondéré modélisant la situation :



$\mathbf{P}(R \cap E) = \mathbf{P}(R) \times \mathbf{P}_R(E)$ donc $\mathbf{P}(R \cap E) = 0,07 \times 0,8 = 0,056$

2. Calculer la probabilité de tirer une épée.
R et $\overline{R}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(E) &= \mathbf{P}(E \cap R) + \mathbf{P}(E \cap \overline{R}) \\ &= = 0,056 + 0,93 \times 0,4 \\ &= 0,428\end{aligned}$$

Conclusion : la probabilité de tirer une épée est égale à $0,428$.

3. Le joueur a tiré une épée. Déterminer la probabilité que ce soit un objet rare. Arrondir le résultat au millième.
On cherche $\mathbf{P}_E(R)$.
Or,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_E(R) &= \frac{\mathbf{P}(E \cap R)}{\mathbf{P}(E)} \\ &= \frac{0,056}{0,428} \\ &\approx 0,131 \quad \text{arrondie au millième}\end{aligned}$$

Partie B

Un joueur remporte 30 défis.

On note X la variable aléatoire correspondant au nombre d'objets rares que le joueur obtient après avoir remporté 30 défis. Les tirages successifs sont considérés comme indépendants.

1. Déterminer, en justifiant, la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X. Préciser ses paramètres, ainsi que son espérance.

   L'expérience est la répétition de 30 épreuves identiques et indépendantes où seuls deux cas sont possibles :

   — soit l'objet obtenu est rare avec la probabilité $p = 0,07$ (probabilité du succès) ;

   — soit il ne l'est pas avec la probabilité $q = 1 - p = 0,93$.

   X désignant le nombre de succès, c'est-à-dire, le nombre d'objets rares parmi les 30, on en déduit que X suit la loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0,07$.
   Par ailleurs $\mathbf{E}(X) = 30 \times 0,07 = 2,1$

2. Déterminer $P(X < 6)$. Arrondir le résultat au millième.

   $\mathbf{P}(X < 6) = \mathbf{P}(X \leq 5)$: à la calculatrice, on trouve alors $\mathbf{P}(X < 6) \approx 0,984$ arrondie au millième.

3. Déterminer la plus grande valeur de k telle que $P(X \geqslant k) \geqslant 0,5$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

   On a $\mathbf{P}(X \geqslant k) \geqslant 0.5 \iff 1 - \mathbf{P}(X \leqslant (k-1)) \geqslant 0,5 \iff 0,5 \geqslant \mathbf{P}(X \leqslant (k-1))$_ or $\mathbf{P}(X \leqslant 2) = 0,649$ et $\mathbf{P}(X \leqslant 1) = 0,369$ au millième donc il faut $k - 1 = 1$ soit $k = 2$. On en déduit que la probabilité que le joueur ait tiré au moins 20 objets rares est supérieure ou égale à $0,5$.

4. Les développeurs du jeu vidéo veulent proposer aux joueurs d'acheter un « ticket d'or » qui permet de tirer N objets. La probabilité de tirer un objet rare reste de 7 %.

   Les développeurs aimeraient qu'en achetant un ticket d'or, la probabilité qu'un joueur obtienne au moins un objet rare lors de ces N tirages soit supérieure ou égale à $0,95$.

   Déterminer le nombre minimum d'objets à tirer pour atteindre cet objectif. On veillera à détailler la démarche mise en œuvre.

   Dans cette configuration X suit la loi binomiale de paramètres N inconnue et $p = 0,07$.
   On désire avoir $P(Y \geqslant 1) \geqslant 0,95$.
   Or $\mathbf{P}(X \geqslant 1) = 1 - \mathbf{P}(Y = 0) = 1 - 0,93^N$.
   Ainsi $\mathbf{P}(Y \geqslant 1) \geqslant 0,95 \iff 1 - 0,93^N \geqslant 0,95$.
   À la calculatrice $1 - 0,93^{41} < 0,95$ et $1 - 0,93^{42} > 0,5$ donc on retient $N = 42$.

Exercice 2 — 5 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Les cinq questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On considère une suite (t_n) vérifiant la relation de récurrence :

$$\text{pour tout entier naturel } n,\ t_{n+1} = -0,8t_n + 18.$$

Affirmation 1 : la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = t_n - 10$ est géométrique.

Pour tout entier naturel n ,

$$\begin{array}{rcl} w_{n+1} & = & t_{n+1} - 10 \\ & = & -0,8t_n + 18 - 10 \\ & = & -0,8t_n + 8 \\ & = & -0,8(t_n - 10) \\ & = & -0,8w_n \end{array}$$

La suite (w_n) est géométrique de raison -0.8 : l'affirmation est vraie.

2. On considère une suite (S_n) qui vérifie pour tout entier naturel n non nul :

$$3n - 4 \leqslant S_n \leqslant 3n + 4.$$

La suite (u_n) est définie, pour tout entier naturel n non nul, par : $u_n = \dfrac{S_n}{n}$.

Affirmation 2 : la suite (u_n) converge.

Pour tout entier naturel n non nul :

$$3n - 4 \leqslant S_n \leqslant 3n + 4.$$

en divisant par $n > 0$ non nul on a :

$$\frac{3n-4}{n} \leqslant \frac{S_n}{n} \leqslant \frac{3n+4}{n}.$$

d'où :

$$3 - \frac{4}{n} \leqslant u_n \leqslant 3 + \frac{4}{n}.$$

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 3 - \frac{4}{n} = \lim_{n\to+\infty} 3 + \frac{4}{n} = 3$ donc d'après le théorème d'encadrement des limites, (u_n) converge vers 3 : affirmation vraie.

3. On considère la suite (v_n) définie par :

$$v_1 = 2 \text{ et pour tout entier naturel } n \geqslant 1,\ v_{n+1} = 2 - \frac{1}{v_n}.$$

Affirmation 3 : pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $v_n = \dfrac{n+1}{n}$.

On démontre ce résultat par récurrence.

Soit $\mathscr{P}_n$ la proposition : $v_n = \dfrac{n+1}{n}$.

— **Initialisation.** Vérifions que $\mathscr{P}_1$ est vraie.
Si $n = 1$ on a $v_1 = 2$ et $\dfrac{1+1}{1} = 2$ donc $v_1 = \dfrac{1+1}{1}$: $\mathscr{P}_1$ est vraie.

— **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie c'est à dire $v_n = \dfrac{n+1}{n}$.
Démontrons alors que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 2 - \frac{1}{v_n} \\ &= 2 - \frac{1}{\frac{n+1}{n}} \\ &= 2 - \frac{n}{n+1} \\ &= \frac{2(n+1)}{n+1} - \frac{n}{n+1} \\ &= \frac{n+2}{n+1} \end{aligned}$$

On en déduit que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

— Conclusion. $\mathscr{P}_1$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire à partir du rang $n = 1$ donc $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n non nul : affirmation vraie.

4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \mathrm{e}^n - n$.
Affirmation 4 : la suite (u_n) converge.
On calcule $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.
On reconnait une forme indéterminée du type « $\infty - \infty$ », donc on change d'écriture.
Pour tout entier naturel n non nul : $u_n = n\left(\dfrac{\mathrm{e}^n}{n} - 1\right)$.
Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^n}{n} = +\infty$ (limite de cours) donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^n}{n} - = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$.
Par produit des limites $\lim\limits_{n \to +\infty} n\left(\dfrac{\mathrm{e}^n}{n} - 1\right) = +\infty$: la suite (u_n) diverge donc vers $+\infty$ donc l'affirmation est fausse.

5. On considère la suite (u_n) définie à l'aide du script écrit ci-dessous en langage Python, qui renvoie la valeur de u_n.

```
def u(n) :
    valeur = 2
    for k in range(n) :
        valeur = 0.5 * (valeur + 2/valeur)
    return valeur
```

On admet que (u_n) est décroissante et vérifie pour tout entier naturel n :

$$\sqrt{2} \leqslant u_n \leqslant 2.$$

Affirmation 5 : la suite (u_n) converge vers $\sqrt{2}$.

La suite (u_n) est décroissante et minorée par $\sqrt{2}$ donc elle converge vers un réel ℓ.
Soit ℓ la limite de la suite (u_n).
On a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.
De même $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \ell$.

D'après le script $u_{n+1} = 0,5 \times \left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right)$: par passage à la limite il vient : $\ell = 0,5\left(\ell + \dfrac{2}{\ell}\right)$.

D'où $\ell = 0,5\ell + \dfrac{1}{\ell}$ soit $\ell^2 = 2$.

Cette équation a deux solutions : $\ell = \pm\sqrt{2}$: or la suite (u_n) est minorée par $\sqrt{2}$ donc $\ell = \sqrt{2}$: l'affirmation est vraie.

Exercice 3 — 5 points

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$ par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x-1}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$.
On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1. **a.** Calculer la limite de la fonction f en 1.

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \mathrm{e}^x = \mathrm{e} > 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} x-1 = 0^-$.
Par quotient des limites : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = -\infty$.

b. En déduire une interprétation graphique.

La droite d'équation $x = 1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

2. Calculer la limite de la fonction f en $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x-1 = -\infty$ par quotient des limites : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

3. **a.** Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$, on a :

$$f'(x) = \frac{(x-2)\mathrm{e}^x}{(x-1)^2}.$$

f est dérivable sur $]-\infty\,;\,1[$ et pour tout réel $x < 1$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\mathrm{e}^x(x-1)-\mathrm{e}^x(1)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{\mathrm{e}^x(x-1-1)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

b. Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$.

Pour $x \in]-\infty\,;\,1[$, $\dfrac{\mathrm{e}^x}{(x-1)^2} > 0$ donc f' est du signe de $x-2$ qui donne le sens de variations de f, or $x-2<0$ pour $x<1$, on a ainsi :

x	$-\infty$	α	1
Signe de $f'(x)$		$-$	‖
Variation de f	0 ↘	-2 ↘	$-\infty$ ‖

4. On admet que, pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$, on a :

$$f''(x) = \frac{\left(x^2-4x+5\right)\mathrm{e}^x}{(x-1)^3}.$$

a. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$.

b. Déterminer l'équation réduite de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

c. En déduire que, pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$, on a :

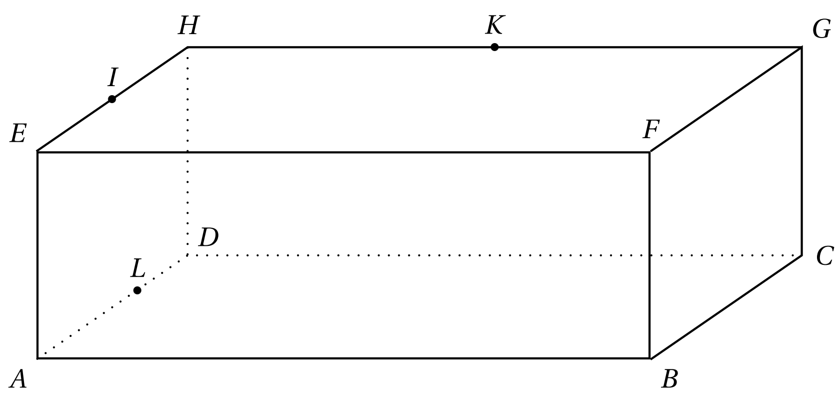
$$\mathrm{e}^x \geqslant (-2x-1)(x-1).$$

5. **a.** Justifier que l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$.

b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Exercice 4 — 4 points

Soit ABCDEFGH un parallélépipède rectangle tel que : $AB = 6$ et $AD = AE = 3$.
Soit I le milieu du segment $[EH]$, K le milieu du segment $[HG]$ et L le point tel que : $\overrightarrow{AL} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.



On se place dans le repère orthonormé $\left(A;\ \dfrac{1}{6}\overrightarrow{AB},\ \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD},\ \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AE}\right)$

1. Donner, sans justifier, les coordonnées des points I, K et L.
2. Déterminer les coordonnées de deux vecteurs de base, c'est-à-dire, deux vecteurs directeurs du plan (IKL).
3. Soit N le point de coordonnées $(2;3;0)$.
   Démontrer que les points I, K, L et N sont coplanaires.
4. Justifier que le point N appartient à la droite (DC).
5. Placer le point N sur la figure donnée en annexe de la page 6.
6. Tracer la section du parallélépipède par le plan (IKL) sur l'annexe de la page 6.