BACCALAURÉAT BLANC SUJET 2

Session 2025

MATHÉMATIQUES

:

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures** –

Ce sujet comporte cinq pages numérotées de 1/6 à 6/6
La dernière page comporte une annexe à remettre complétée de votre nom et classe.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée

La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1 — 6 points

Les données publiées le 1[er] mars 2023 par le ministère de la transition écologique sur les immatriculations de véhicules particuliers en France en 2022 contiennent les informations suivantes :

- 22,86 % des véhicules étaient des véhicules neufs .
- 8,08 % des véhicules neufs étaient des hybrides rechargeables.
- 1,27 % des véhicules d'occasion (c'est-à-dire qui ne sont pas neufs) étaient des hybrides rechargeables.

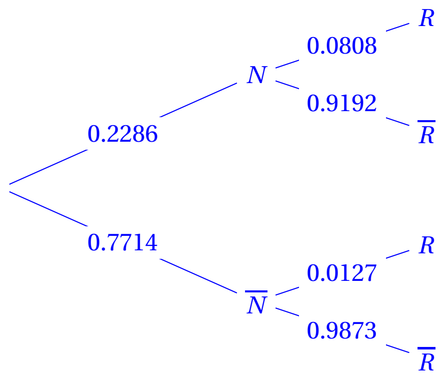
Dans tout l'exercice, les probabilités seront arrondies au dix-millième.

Partie A

Dans cette partie, on considère un véhicule particulier immatriculé en France en 2022.
On note :

- N l'évènement « le véhicule est neuf ».
- R l'évènement « le véhicule est hybride rechargeable ».
- $\overline{N}$ et $\overline{R}$ les évènements contraires des évènements contraires de N et R.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.



2. Calculer la probabilité que ce véhicule soit neuf et hybride rechargeable.
   $P(N \cap R) = P(N) \times P_N(R) = 0.2286 \times 0.0808 = 0.0185$ au dix-millième.
3. Démontrer que la valeur arrondie au dix-millième de la probabilité que ce véhicule soit hybride rechargeable est 0,028 3.
   N et $\overline{N}$ forment une partition de l'univers, par la formule des probabilités totales :
   $P(R) = P(N \cap R) + P(\overline{N} \cap R) = 0.2286 \times 0.0808 + 0.7714 \times 0.0127 = 0.0283$
4. Calculer la probabilité que ce véhicule soit neuf sachant qu'il est hybride rechargeable.

On veut $P_R(N) = \dfrac{P(N \cap R)}{P(R)} = \dfrac{0.2286 \times 0.0808}{0.0283} = 0.6534$ (les élèves en utilisant les arrondis trouvent 0.6537)

Partie B

Dans cette partie, on choisit 500 véhicules particuliers hybrides rechargeables immatriculés en France en 2022.
Dans la suite, on admettra que la probabilité qu'un tel véhicule soit neuf est égale à 0,65.
On assimile le choix de ces 500 véhicules à un tirage aléatoire avec remise.
On appelle X la variable aléatoire représentant le nombre de véhicules neufs parmi les 500 véhicules choisis.

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser la valeur de ses paramètres.
   $p = 0.65$ et $n = 500$
2. Déterminer la probabilité qu'exactement 325 de ces véhicules soient neufs.
   $P(X = 325) = 0.0374$

3. Déterminer la probabilité $p(X \geq 325)$ puis interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
   $P(X \geq 325) = 1 - P(X \leq 324) = 0.5206$ Dans un lot de 500 véhicules choisis, dans 52% des cas il y a plus de 325 véhicules neufs.

Partie C

On choisit désormais n véhicules particuliers hybrides rechargeables immatriculés en France en 2022, où n désigne un entier naturel strictement positif.
On rappelle que la probabilité qu'un tel véhicule soit neuf est égale à $0,65$.
On assimile le choix de ces n véhicules à un tirage aléatoire avec remise.

1. Donner l'expression en fonction de n de la probabilité p_n que tous ces véhicules soient d'occasion.
   Soit Y la variable aléatoire comptant le nombre de véhicules neufs dans un lot de n véhicules le choix étant assimilé à un tirage aléatoire avec remise, Y suit une loi binomiale de paramètres n et p=0.65. On a :
   $p_n = P(Y = 0) = 0.35^n$
2. On note q_n la probabilité qu'au moins un de ces véhicules soit neuf. Déterminer la plus petite valeur de n telle que $q_n \geqslant 0{,}9999$.
   $q_n = P(Y \geq 1) = 1 - p_n$ donc :
   $q_n \geq 0.9999 \iff 1 - 0.35^n \geq 0.9999 \iff 0.0001 \geq 0.35^n$
   Grace à une table à la calculatrice on a :$0.35^8 > 0.0001$ et $0.35^9 < 0.0001$ donc $n = 9$

Exercice 2 — 4 points

Répondre par VRAI ou FAUX à chacune des affirmations suivantes et justifier votre réponse.
Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte dans la notation.
Toutes les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n par

$$u_n = \frac{25 + (-1)^n}{n}.$$

   Affirmation 1 : La suite (u_n) est divergente.
   pour tout n entier non nul, $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ donc $24 \leq 25 + (-1)^n \leq 26$ ainsi : $\frac{24}{n} \leq u_n \leq \frac{26}{n}$ or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{24}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{26}{n} = 0$ par le théorème des gendarmes (u_n) converge vers 0 L'affirmation est fausse.

2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} w_0 & = & 1 \\ w_{n+1} & = & \dfrac{w_n}{1 + w_n} \end{cases}$

   On admet que pour tout entier naturel n, $w_n > 0$.
   On considère la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par $t_n = \frac{k}{w_n}$ où k est un nombre réel strictement positif.
   Affirmation 2 : La suite (t_n) est une suite arithmétique strictement croissante.
   pour tout n entier naturel, $t_{n+1} = \frac{k}{w_{n+1}} = \frac{k}{\frac{w_n}{1 + w_n}} = k \times \frac{1 + w_n}{w_n} = k \times (\frac{1}{w_n} + 1) = \frac{k}{w_n} + k = t_n + k$ donc la suite (t_n) est arithmétique de raison k et k est un réel strictement positif ainsi la suite (t_n) est strictement croissante donc l'affirmation est vraie.

3. On donne ci-contre la fonction u écrite en langage Python.

```
def u(a,n) :
    u=a
    for k in range(n) :
      u=u**2-2*u+2
    return u
```

Affirmation 3 : La valeur renvoyée par le programme lorsque l'on saisit `u(2,2)` dans la console Python est 1.

si on saisit $u(2,2)$ dans la console alors $a=2$ et $n=2$ la boucle est répétée deux fois avec au départ $u=2$ ainsi au premier passage dans la boucle $u=2^2-2\times2+2=2$ puis au deuxième passage $u=2^2-2\times2+2=2$ la valeur retournée est alors $u=2$ donc l'affirmation est fausse.

4. Soit la suite (p_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} p_0 & = & \dfrac{1}{2} \\ p_{n+1} & = & \dfrac{1}{4}p_n+\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Affirmation 4 : la suite (p_n) est croissante et majorée par $\frac{2}{3}$.

Une table à la calculatrice montre que cette affirmation semble vraie.

Démontrons par récurrence que (p_n) est majorée par $\frac{2}{3}$

Initialisation : $p_0=\frac{1}{2}$ donc $p_0\leq\frac{2}{3}$ la propriété de majoration est vraie au rang initial.

Hérédité : Supposons que pour n entier naturel, $p_n\leq\frac{2}{3}$.

On a alors $\frac{1}{4}p_n\leq\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}$ donc $\frac{1}{4}p_n+\frac{1}{2}\leq\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}$ d'où $p_{n+1}\leq\frac{2}{3}$ donc la propriété est héréditaire.

Conclusion : la propriété est vraie au rang initial, elle est héréditaire ainsi par récurrence on a : Pour tout n entier, (p_n) majorée par $\frac{2}{3}$.

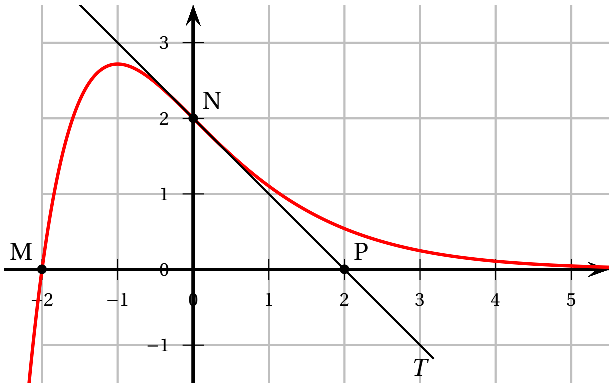
Etudions les variations de (p_n) : $p_{n+1}-p_n=\frac{1}{4}p_n+\frac{1}{2}-p_n=-\frac{3}{4}p_n+\frac{1}{2}$ or on sait que pour tout n, $p_n\leq\frac{2}{3}$ en multipliant chaque membre par $-\frac{3}{4}$ puis en ajoutant $\frac{1}{2}$ on obtient $-\frac{3}{4}p_n+\frac{1}{2}\geq-\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}$ d'où $p_{n+1}-pn\geq0$ ce qui prouve que la suite (p_n) est croissante ainsi l'affirmation est vraie

Exercice 3 — 6 points

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa fonction dérivée et f'' sa dérivée seconde.
Dans le repère orthonormé ci-dessous ont été représentés :

- la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f ;
- la tangente T à $\mathscr{C}_f$ en son point $\mathrm{N}(0;2)$;
- le point $\mathrm{M}(-2;0)$ appartenant à $\mathscr{C}_f$ et $\mathrm{P}(2;0)$ appartenant à la tangente T.

On précise que la fonction f est strictement positive sur l'intervalle $[0;+\infty[$ et qu'elle est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty;-1]$.



Partie A : étude graphique

On répondra aux questions suivantes en utilisant le graphique.

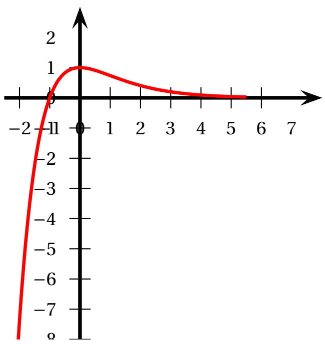
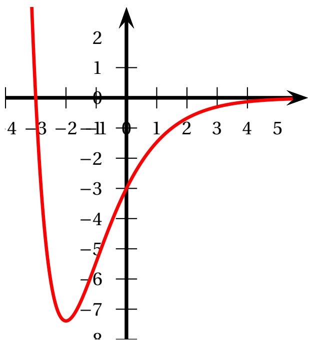
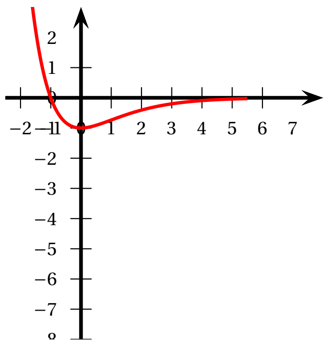
1. **a.** Donner $f(0)$.
   $f(0) = 2$

   b. Déterminer $f'(0)$.
   $f\,'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0. Cette tangente est la droite T qui a pour coefficient directeur -1 donc $f\,'(0) = -1$

2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
   $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses au point M d'abscisse -2 et f est strictement positive sur $[0; +\infty[$ donc la seule solution de l'équation $f(x) = 0$ est $x = -2$

3. La fonction f est-elle convexe sur $\mathbb{R}$? Justifier.
   Non car au point N la courbe traverse sa tangente, elle est concave pour $x < 0$ puis convexe pour $x > 0$.

4. Parmi les courbes suivantes, indiquer laquelle peut représenter la fonction dérivée f ' de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Justifier.

Courbe 1	Courbe 2	Courbe 3
		

f est strictement croissante sur $]-\infty; -1]$ alors $f' > 0$ sur $]-\infty; -1]$ donc la courbe de la fonction dérivée est la courbe 3

Partie B : recherche d'une expression algébrique

On admet que la fonction f est de la forme

$$f(x) = (ax + b)e^{\lambda x},$$

où a, b et λ sont des constantes réelles.
Pour répondre aux questions suivantes, on utilisera les résultats de la partie A.

1. Justifier que $b = 2$.
   $f(0) = (a \times 0 + b)e^{\lambda \times 0} = b$ or $f(0) = 2$ donc $b = 2$
2. Justifier que $-2a + b = 0$ puis en déduire la valeur de a.
   On sait que $f(-2) = 0$ alors $(-2a + b)e^{-2\lambda} = 0$ donc $-2a + b = 0$ or $b = 2$ d'où $-2a + 2 = 0$ ainsi $a = 1$
3. Déterminer une expression algébrique de f. Justifier.
   On a : $a = 1$ et $b = 2$ donc $f(x) = (x+2)e^{\lambda x}$ alors $f'(x) = 1 \times e^{\lambda x} + (x+2)\lambda e^{\lambda x}$ ainsi $f'(0) = 1 + 2\lambda$ or $f'(0) = -1$ donc $1 + 2\lambda = -1$ alors $\lambda = -1$ par suite $f(x) = (x+2)e^{-x}$

Partie C : étude algébrique

On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x+2)e^{-x}.$$

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$, interpréter graphiquement le résultat.
   $f(x) = (x+2)e^{-x} = \dfrac{x+2}{e^x} = \dfrac{x}{e^x} + \dfrac{2}{e^x}$ or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{e^x} = 0$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ (croissances comparées) donc par somme : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Interprétation : La droite d'équation $y = 0$ est une asymptote au voisinage de $+\infty$.
2. On admet que $f'(x) = (-x-1)e^{-x}$. Dresser le tableau de variations complet de f en justifiant la réponse.
   pour tout réel x, $e^{-x} > 0$ donc f' est du signe de $(-x-1)$ ce qui donne les variations de f :

x	$-\infty$		-1		α		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$			
f	$-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	1	$\searrow$	0

   $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (x+2) = -\infty$ par produit $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
   $f(-1) = (-1+2)e^1 = e$
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution notée α sur $[-1\,;+\infty[$.
   f est dérivable donc continue et strictement monotone sur $[-1;+\infty[$.
   $1 \in]0;e]$ (intervalle image) par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires il existe un unique réel α dans l'intervalle $[-1;+\infty[$ tel que : $f(\alpha) = 0$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α sur $[-1;+\infty[$
4. Donner une valeur approchée de α à 0.01 près.
   D'après la calculatrice, $f(1.146) > 1$ et $f(1.147) < 1$ donc $1.146 < \alpha < 1.147$ donc une valeur approchée de α à 0.01 près : 1.15
5. **a.** Étudier la convexité de f.
   On a : $f'(x) = (-x-1)e^{-x}$ donc $f''(x) = -1e^{-x} + (-x-1)(-1)e^{-x} = xe^{-x}$ or pour tout x réel $e^{-x} > 0$ donc f'' est du signe de x sur **R** ainsi : $f''\,'' \geq 0$ sur $[0;+\infty[$ donc f est convexe sur $[0;+\infty[$ et $f''\,'' \leq 0$ sur $]-\infty;0]$ donc f est concave sur $]-\infty;0]$

   b. Préciser les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.
   En $x = 0$ la dérivée seconde s'annule et change de signe de part et d'autre donc on a un point d'inflexion en N(0;2)

   c. Déterminer l'équation réduite de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
   L'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 0 est : $y = f'(0)(x-0) + f(0) \iff y = -x + 2$

   d. En déduire que, pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty\,;0\,]$, on a :

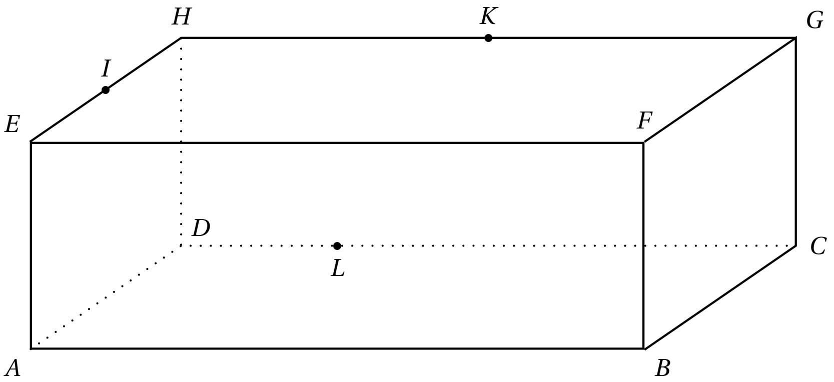
$$(x-2)e^x + x + 2 \leq 0$$

   pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty\,;0\,]$ f est concave donc sa courbe représentative est en dessous de ses tangentes en particulier T ainsi :
   $f(x) \leq (-x+2)$ ce qui équivaut à : $(x+2)e^{-x} \leq (-x+2) \iff (x+2) \leq (-x+2)e^x \iff (x+2) - (-x+2)e^x \leq 0$ ce qui équivaut à $x + 2 + (x-2)e^x \leq 0$

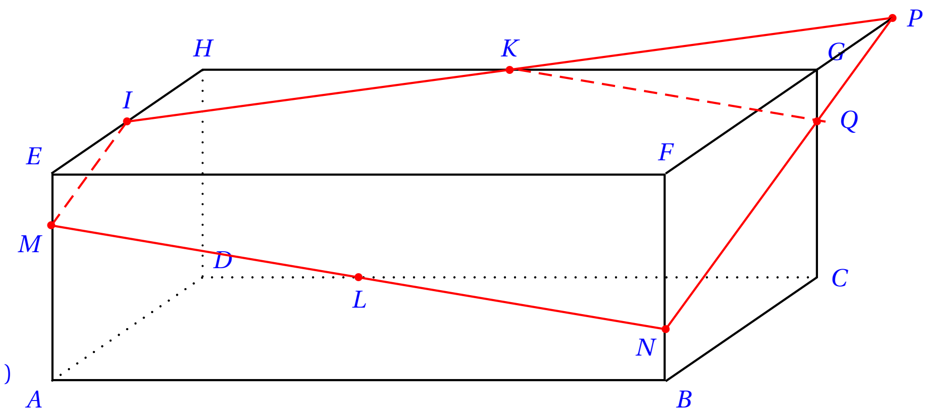
Exercice 4 **4 points**

Soit ABCDEFGH un parallélépipède rectangle tel que :AB= 6cm et AD=3cm.
Soit I le milieu du segment [EH], K le milieu du segment [HG] et L le centre de la face ABFE.

On se place dans le repère $(A;\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AE})$



1. Donner les coordonnées des points I,K et L.
   A(0;0;0) , B(6;0;0) , C(6;3;0) , D(0;3;0) , E(0;0;3) , F(6;0;3) , G(6;3;3) , H(0;3;3) , I(0;1.5;3) , K(3;3;3) et L(3;0;1.5)
2. Donner les coordonnées de deux vecteurs directeurs du plan (IKL).
   Une base du plan (IKL) est $\overrightarrow{IK}$ $(3;1.5;0)$ et $\overrightarrow{IL}$ $(3;-1.5;-1.5)$
3. Soit N le point de coordonnées (6; 0; $\frac{3}{4}$) . Démontrer que les points I,K,L et N sont coplanaires
   Existe-t-il deux réels t et t' tels que : $\overrightarrow{IN} = t\times\overrightarrow{IK} + t'\times\overrightarrow{IL}$
   $$\overrightarrow{IN} = t\times\overrightarrow{IK} + t'\times\overrightarrow{IL} \iff \begin{cases} 6 &= 3t+3t' \\ -1.5 &= 1.5t-1.5t' \\ -2.25 &= -1.5t' \end{cases}$$
   La ligne 3 donne $t' = \frac{3}{2}$ en remplaçant dans La ligne 1 on trouve $t = \frac{1}{2}$, la ligne 2 est-elle vérifiée par ces valeurs ?
   $1.5t - 1.5t' = 1.5\times\frac{1}{2} - 1.5\times\frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$ donc elle est vérifiée ainsi $\overrightarrow{IN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IK} + \frac{3}{2}\overrightarrow{IL}$ donc les points sont coplanaires , $N \in (IKL)$
4. Justifier que le point N appartient à la droite (BF).
   $\overrightarrow{BF}$ $(0;0;3)$ et $\overrightarrow{BN}$ $(0;0;\frac{3}{4})$ donc $\overrightarrow{BF} = 4\overrightarrow{BN}$ ces vecteurs sont donc colinéaires ainsi les points B,N et F sont alignés d'où N appartient à la droite (BF).
5. Placer le point N sur la figure donnée en annexe (page 5).
6. Tracer la section du parallélépipède par le plan (IKL) sur la figure donnée en annexe (page 5).
   Dans la face EFGH, on peut tracer [KI] et dans la face ABFE on peut tracer [LN] qui prolongée coupe (EA) en M.
   On peut alors tracer en pointillés dans la face ADHE le sgment [IM].
   On prolonge (KI) qui coupe (FG) en P.
   La droite (PN) coupe (GC) en Q. On termine alors la section enctraçant [QN] et [KQ] en pointillés.



Annexe de l'exercice 4