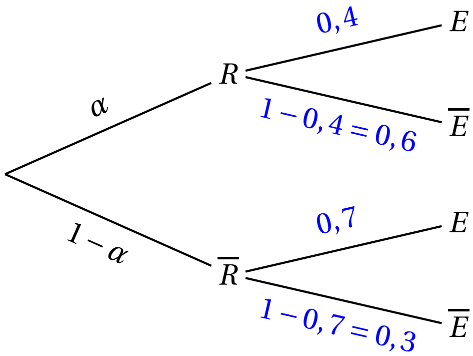
Correction exercice n$^{\text{o}}$1

1. On complète l'arbre proposé :



2. (a) R et $\overline{R}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{P}(E) & = & \mathbf{P}(R\cap E)+\mathbf{P}\left(\overline{R}\cap E\right) \\ & = & \alpha\times 0,4+(1-\alpha)\times 0,7 \\ & = & 0,4\alpha+0,7-0,7\alpha \\ & = & 0,7-0,3\alpha \end{array}$$

   (b) La probabilité que le client loue un vélo électrique est $\mathbf{P}(E)=0,58$.
   Or $\mathbb{P}(E)=0,7-0,3\alpha$. Donc $0,7-0,3\alpha=0,58$ ce qui équivaut à $0,7-0,58=0,3\alpha$ ou encore $0,12=0,3\alpha$ soit $\alpha=0,4$.

3. On sait que le client a loué un vélo électrique. La probabilité qu'il ait loué un vélo tout terrain est :

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{P}_E\left(\overline{R}\right) & = & \dfrac{\mathbf{P}\left(\overline{R}\cap E\right)}{\mathbf{P}(E)} \\ & = & \dfrac{(1-0,4)\times 0,7}{0,58} \\ & = & \dfrac{0,42}{0,58} \\ & \approx & 0,72 \end{array}$$

4. La probabilité que le client loue un vélo tout terrain électrique est : $\mathbf{P}\left(\overline{R}\cap E\right)=0,42$.

5. Le prix de la location à la journée d'un vélo de route non électrique est de 25 euros, celui d'un vélo tout terrain non électrique de 35 euros. Pour chaque type de vélo, le choix de la version électrique augmente le prix de location à la journée de 15 euros.
   On appelle X la variable aléatoire modélisant le prix de location d'un vélo à la journée.

   (a) On a quatre possibilités.

- La location d'un vélo de route non électrique coûte 25 €.
  Cela correspond à l'évènement $R \cap \overline{E}$ de probabilité $0,4 \times 0,6 = 0,24$.
- La location d'un vélo de route électrique coûte $25 + 15$ soit 40 €.
  Cela correspond à l'évènement $R \cap E$ de probabilité $0,4 \times 0,4 = 0,16$.
- La location d'un vélo tout terrain non électrique coûte 35 €.
  Cela correspond à l'évènement $\overline{R} \cap \overline{E}$ de probabilité $0,6 \times 0,3 = 0,18$.
- La location d'un vélo tout terrain électrique coûte $35 + 15$ soit 50 €.
  Cela correspond à l'évènement $\overline{R} \cap E$ de probabilité $0,6 \times 0,7 = 0,42$.

On établit la loi de probabilité de X :

x_i	25	35	40	50
$p_i = \mathbf{P}(X = x_i)$	0,24	0,18	0,16	0,42

(b) L'espérance mathématique de X est :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum x_i \times p_i \\ &= 25 \times 0,24 + 35 \times 0,18 + 40 \times 0,16 + 50 \times 0,42 \\ &= 39,70 \end{aligned}$$

Le coût moyen d'une location est donc de 39,70 euros.

6. Lorsqu'on choisit 30 clients d'Hugo au hasard, on assimile ce choix à un tirage avec remise. On note Y la variable aléatoire associant à un échantillon de 30 clients choisis au hasard le nombre de clients qui louent un vélo électrique.
   On rappelle que la probabilité de l'évènement E est : $\mathbf{P}(E) = 0,58$.

   (a) Il s'agit d'une répétition de 30 épreuves identiques et indépendantes n'ayant que deux issues, la probabilité du succès pour une épreuve étant égale à 0,58.
   Donc la variable aléatoire Y qui donne le nombre de succès sur 30 tirages, suit une loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0,58$.

   (b) La probabilité qu'un échantillon contienne exactement 20 clients qui louent un vélo électrique est :
   $\mathbf{P}(Y \geqslant 15)(Y = 20) = \binom{30}{20} \times 0,58^{20} \times (1 - 0,58)^{30-20} \simeq 0,095$.

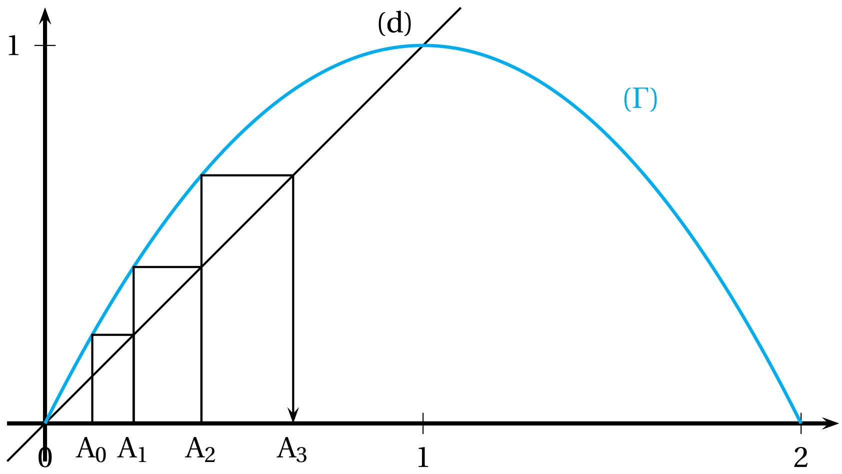
   (c) La probabilité qu'un échantillon contienne au moins 15 clients qui louent un vélo électrique est :
   $\mathbf{P}(Y \geqslant 15) = 1 - \mathbf{P}(Y \leqslant 14)$ soit $\mathbf{P}(Y \geqslant 15) \simeq 0,858$.

Correction exercice n°2

1. (a) $u_1 = u_0(2 - u_0)$ donc $u_1 = \dfrac{1}{8}\left(2 - \dfrac{1}{8}\right)$ d'où $u_1 = \dfrac{15}{64}$.

   De même $u_2 = u_1(2 - u_1)$ d'où $u_2 = \dfrac{1695}{4096}$.

   (b) On construit les quatre premiers termes de la suite :



2. (a) Soit $\mathscr{P}_n$: $0 < u_n < 1$.

   Montrons tout d'abord que f est strictement croissante sur $[0\,;1]$.

   f est dérivable en tant que polynôme de degré 2 sur $[0\,;1]$ et pour tout réel $x \in [0\,;1]$, on a $f'(x) = 2 - 2x > 0$: on en déduit que f est strictement croissante sur $[0\,;1]$

   — *Initialisation*. Vérifions que $\mathscr{P}_0$ est vraie.
   On a $u_0 = a$ et $0 < a < 1$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.

   — *Hérédité*. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie, c'est-à-dire $0 < u_n < 1$.
   Par hypothèse de récurrence $0 < u_n < 1$ donc $f(0) < f(u_n) < f(1)$ car la fonction f est strictement croissante sur $[0\,;1]$ donc l'ordre est conservé sur cet intervalle.
   Or $f(1) = 1$, $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(0) = 0$ donc $0 < u_{n+1} < 1$ ce qui prouve que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

   — **Conclusion :** $\mathscr{P}_0$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire à partir du rang $n = 0$, on en déduit que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n < 1$$

   .

   (b) $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_n(2 - u_n) - u_n \\ &= u_n(1 - u_n) \end{aligned}$$

   Or on vient de démontrer que $u_n < 1 \iff 1 - u_n > 0$ et comme $u_n > 0$, on obtient par produit $u_{n+1} - u_n > 0$, ce qui montre que la suite (u_n) est croissante.

(c) La suite (u_n) est croissante et majorée par 1 : elle est donc convergente vers une limite ℓ telle que $\ell \leqslant 1$.

3. (a) $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{array}{rcl} v_{n+1} & = & 1-u_{n+1} \\ & = & 1-u_n(2-u_n) \\ & = & 1-2u_n+u_n^2 \\ & = & (1-u_n)^2 \\ & = & v_n^2 \end{array}$$

(b) On a $v_0 = 1-u_0 = 1-\dfrac{1}{8}$ donc $v_0 = \dfrac{7}{8}$.

D'où $v_1 = v_0^2 = \left(\dfrac{7}{8}\right)^2$.

Puis $v_2 = v_1^2 = \left[\left(\dfrac{7}{8}\right)^2\right]^2 = \left(\dfrac{7}{8}\right)^{2^2}$.

On va montrer par récurrence que $v_n = \left(\dfrac{7}{8}\right)^{2^n}$.

- *Initialisation* : on a vu que la proposition est vraie au rang zéro.
- *Hérédité* : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $v_n = \left(\dfrac{7}{8}\right)^{2^n}$.

On a $v_{n+1} = v_n^2$ et par hypothèse de récurrence $v_n = \left(\dfrac{7}{8}\right)^{2^n}$.

On en déduit que $v_{n+1} = \left[\left(\dfrac{7}{8}\right)^{2^n}\right]^2$ ce qui induit que $v_{n+1} = \left(\dfrac{7}{8}\right)^{2\times 2^n} = \left(\dfrac{7}{8}\right)^{2^{n+1}}$.

La relation est vraie au rang $n+1$: elle est donc vraie pour tout entier naturel n.

(c) Comme $-1 < \dfrac{7}{8} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{7}{8}\right)^n = 0$ et a fortiori $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{7}{8}\right)^{2^n} = 0$.

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Comme $v_n = 1-u_n \iff u_n = 1-v_n$; on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Correction exercice n°3

Conjectures. Il semble que :

— f soit strictement croissante sur $[-3\ 2]$.

— la courbe représentative de la fonction f soit en dessous de l'axe des abscisses sur l'intervalle $[-3\,;0]$ et au dessus sur $[0\,;2]$.

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\mathrm{e}^{x-1} + x^2\mathrm{e}^{x-1} - x \\ &= x\big((x+2)\mathrm{e}^{x-1} - 1\big) \\ &= xg(x) \end{aligned}$$

2. Étude du signe de $g(x)$ pour x réel.
   (a) — Limite en $+\infty$:
   $\lim\limits_{x\to+\infty} x+2 = +\infty$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} x-1 = +\infty \\ \lim\limits_{T\to+\infty} \mathrm{e}^T = +\infty \end{array}\right\} \overset{\text{par composition des limites}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x-1} = +\infty.$$

   On en déduit par produit des limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+2)\mathrm{e}^{x-1} = +\infty$.
   On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

   — Limite en $-\infty$.
   On reconnaît une forme indéterminée, on change d'écriture.
   $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g(x) &= (x+2)\mathrm{e}^{x-1} - 1 \\ &= x\mathrm{e}^{x-1} + 2\mathrm{e}^{x-1} - 1 \\ &= x\mathrm{e}^{x} \times \mathrm{e}^{-1} + 2\mathrm{e}^{x} \times \mathrm{e}^{-1} - 1 \end{aligned}$$

   On a $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0$ (limite de cours) donc $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{-1} = 0$.
   $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{-1} = 0$ et par suite : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -1$.

   (b) g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 \times \mathrm{e}^{x-1} + (x+2) \times 1\mathrm{e}^{x-1} \\ &= (1+x+2)\mathrm{e}^{x-1} \\ &= (x+3)\mathrm{e}^{x-1} \end{aligned}$$

   $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{x-1} > 0$ donc $g'(x)$ est du signe de $x+3$.
   Or $x+3=0 \Longleftrightarrow x=-3$: on en déduit le tableau de signe de $g'(x)$ sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	

(c) Du tableau de signes de $g'(x)$ on en déduit que :

— g est strictement décroissante sur $]-\infty\ -3]$.

— g est strictement croissante sur $[-3\,;+\infty[$

On peut alors dresser le tableau de variation complet de g sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		-3		α		$+\infty$
Variation de g	-1	$\searrow$	$-\mathrm{e}^{-4}-1$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$g(-3) = -\mathrm{e}^{-4} - 1$

(d) — Sur l'intervalle $]-\infty\,;-3]$, on a $g(x) < -1$ donc l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution sur cet intervalle.

— Sur l'intervalle $[-3\,;+\infty[$: la fonction g est continue, strictement croissante. $0 \in [-\mathrm{e}^{-4} - 1\,;+\infty[$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[-3\,;+\infty[$.

— En conclusion, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

En utilisant la calculatrice, $g(0,20) \approx -0,01$ donc $g(0,20) < 0$.
De plus $g(0,21) \approx 0,003$ donc $g(0,21) > 0$.
On a bien $0,20 < \alpha < 0,21$.

(e) Des questions précédentes, on en déduit le tableau de signes de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
signe de $g(x)$		$-$	0	$+$	

3. Sens de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

(a) Pour tout réel x on a $f'(x) = xg(x)$.
Dressons le tableau de signes de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
signe de x		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $g(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

(b) On en déduit que la fonction f est croissante sur les intervalles $]\infty\,;0]$ et sur $[\alpha\,;+\infty[$ et décroissante sur l'intervalle $[0\,;\alpha]$.

(c) La conjecture émise quant au sens de variation de f est fausse puisque f n'est pas croissante sur $[-3\ 2]$.

Correction exercice n°4

Partie A

1. La droite (IJ) passe par $I\left(1\,;\frac{1}{3}\,;\,0\right)$, et est dirigée par $\overrightarrow{IJ}\left(-1\,;\frac{1}{3}\,;\,1\right)$.

   Une représentation paramétrique de cette droite est :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1-1\times t \\ y & = & \frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times t \\ z & = & 0+1\times t \end{array}\right.,\ t\in\mathbb{R},\text{ soit}\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1-t \\ y & = & \frac{1}{3}+\frac{1}{3}t \\ z & = & t \end{array}\right.,\ t\in\mathbb{R}$$

2. Soit d la droite qui admet pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x=\frac{3}{4}+t'\left(a-\frac{3}{4}\right) \\ y=t' \\ z=1-t' \end{array}\right.,\ t'\in\mathbb{R}$.

   On vérifie que K∈ d : $\left\{\begin{array}{l} \frac{3}{4}=\frac{3}{4}+t'\left(a-\frac{3}{4}\right) \\ 0=t' \\ 1=1-t' \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} t'=0 \\ t'=0 \\ t'=0 \end{array}\right.$ ce qui est cohérent. Donc K∈ d.

   On vérifie que L∈ d : $\left\{\begin{array}{l} a=\frac{3}{4}+t'\left(a-\frac{3}{4}\right) \\ 1=t' \\ 0=1-t' \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} t'=1 \\ t'=1 \\ t'=1 \end{array}\right.$ ce qui est cohérent. Donc L∈ d.

   Le système paramétrique est donc bien un système pouvant représenter la droite (KL).

3. Les droites (IJ) et (KL) sont sécantes si, et seulement si, le système suivant admet une solution unique pour $(t,\ t')$.

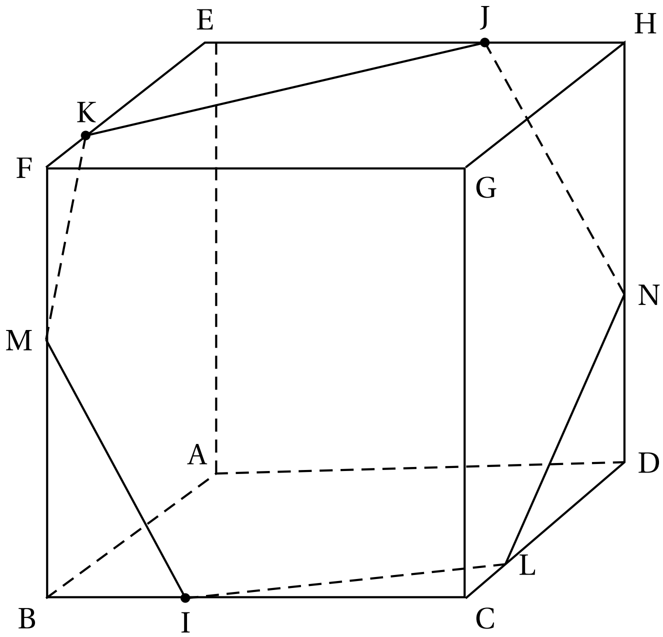
$$\left\{\begin{array}{rcl} 1-t & = & \frac{3}{4}+t'\left(a-\frac{3}{4}\right) \\ \frac{1}{3}+\frac{t}{3} & = & t' \\ t & = & 1-t' \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 1-t & = & \frac{3}{4}+t'\left(a-\frac{3}{4}\right) \\ 1+t & = & 3t' \\ t & = & 1-t' \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} 1-t & = & \frac{3}{4}+t'\left(a-\frac{3}{4}\right) \\ 1+1-t' & = & 3t' \\ t & = & 1-t' \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 1-t & = & \frac{3}{4}+t'\left(a-\frac{3}{4}\right) \\ t' & = & \frac{1}{2} \\ t & = & \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

En remplaçant t et t' par $\frac{1}{2}$, la seule valeur de a pour que la première équation soit vérifiée est $a=\frac{1}{4}$ et dans ce cas $\mathrm{L}\left(\frac{1}{4}\,;1\,;0\right)$.

Partie B

1. Démontrons que $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{JL}$.
   Tout d'abord $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}\dfrac{3}{4}-1\,;\,0-\dfrac{1}{3}\,;\,1-0\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{4}\,;\,-\dfrac{1}{3}\,;\,1\end{pmatrix}$.
   De plus $\overrightarrow{LJ}\begin{pmatrix}0-\dfrac{1}{4}\,;\dfrac{2}{3}-1\,;\,1-0\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{LJ}\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{4}\,;\,-\dfrac{1}{3}\,;\,1\end{pmatrix}$.
   Les vecteurs $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{JL}$ sont égaux donc le quadrilatère IKJL est un parallélogramme.
2. Voici la section du cube par le plan (IJK), il s'agit de l'hexagone (ILNJKM) :



Correction exercice n°5

1. La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,1$. Pour $0 \leqslant k \leqslant 50$, $\mathbf{P}(X = k) = \binom{50}{k} 0,1^k \times 0,9^{50-k}$.

— $\mathbf{P}(\mathrm{A}) = 1 - \mathbf{P}(X = 0)$ donc $\mathbf{P}(\mathrm{A}) = 1 - (0,9)^{50} \approx 0,995$ au millième.

— On a :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathrm{B}) &= \mathbf{P}(X=0)+\mathbf{P}(X=1)+\mathbf{P}(X=2) \\ &= 0,9^{50} + 50\times 0,1\times 0,9^{49} + \frac{50\times 49}{2}\times 0,1^2\times 0,9^{48} \\ &\approx 0,112 \quad \text{au millième.} \end{aligned}$$

— Enfin :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathrm{C}) &= 1-\mathbf{P}(\mathrm{B}) \\ &\approx 1-0,111729 \\ &\approx 0,888 \quad \text{au millième.} \end{aligned}$$

2. (a) La probabilité qu'au moins trois personnes répondent est :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X \geqslant 3) &= 1-[\mathbf{P}(X=0)+\mathbf{P}(X=l)+\mathbf{P}(X=2)] \\ &= 1-\left[\frac{\mathrm{e}^{-a}a^0}{0!}+\frac{\mathrm{e}^{-a}a^1}{1!}+\frac{\mathrm{e}^{-a}a^2}{2!}\right] \\ &= 1-\mathrm{e}^{-a}\left[1+a+\frac{a^2}{2}\right] \end{aligned}$$

(b) $f(5) = 1 - \mathrm{e}^{-5}\left(1+5+\frac{25}{2}\right)$ donc $f(5) \approx 0,875$ au millième.
$a = 5$ correspond à $n = 50$: on est donc dans la situation de la question 1 où on avait une probabilité de 0,888 ; on a donc un résultat voisin.

3. (a) La fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout réel $x \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{e}^{-x}\left(1+x+\frac{x^2}{2}-1-x\right) \\ &= \frac{x^2\mathrm{e}^{-x}}{2} \end{aligned}$$

Comme $x^2 \geqslant 0,\ \mathrm{e}^{-x} > 0,\ f'(x) \geqslant 0$. La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^*$.
$f(0) = 0$. Comme $f(x) = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}^x} - \frac{x}{\mathrm{e}^x} - \frac{x^2}{\mathrm{e}^x}$ la limite de chacun des trois derniers termes est nulle en $+\infty$ (inverse des limites de cours), on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.
D'où le tableau :
On peut alors dresser le tableau de variation complet de g sur $\mathbb{R}$:

x	0	α	$+\infty$
Variation de f	0	$0,95$	1

(b) Sur $\mathbb{R}^*$, la fonction f est continue car dérivable.
La fonction f est strictement croissante.
Or $0,95 \in [0\,;1[$ intervalle image de l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par la fonction f. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0,95$ admet dans l'intervalle $[0\,;+\infty[$ une unique solution α.
On utilise la calculatrice et la méthode de balayage.

$f(6,29) \approx 0,94979$ et $f(6,3) \approx 0,95815$.
On a donc $6,29 < \alpha < 6,3$.

(c) La probabilité qu'au moins trois personnes répondent parmi n personnes interrogées est $f(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}\left(1 + x + \dfrac{x^2}{2}\right)$ et $x = \dfrac{n}{10}$. Pour que $f(x) \geqslant 0,95$ ou d'après la question précédente $f(x) \geqslant f(\alpha)$ il faut que $x \geqslant \alpha$, d'après la croissance de la fonction f vue au 3 a. C'est-à-dire que $\dfrac{n}{10} \geqslant 6,3 \iff n \geqslant 63$.
Il faut donc interroger au minimum 63 personnes.

Correction exercice n°6

I. Existence et unicité de la solution

1. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. (E) : $\mathrm{e}^x = \dfrac{1}{x} \iff x\mathrm{e}^x = 1$
$$\iff x = \mathrm{e}^{-x}$$
$$\iff x - \mathrm{e}^{-x} = 0$$
$$\iff f(x) = 0$$

2. (a) — Limite en $-\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty \\ \lim\limits_{T\to+\infty} \mathrm{e}^T = +\infty\end{array}\right\} \overset{\text{par composition des limites}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty.$$

On en déduit par différence des limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

— Limite en $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty \\ \lim\limits_{T\to-\infty} \mathrm{e}^T = 0\end{array}\right\} \overset{\text{par composition des limites}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0.$$

On en déduit par différence des limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

(b) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = 1 + \mathrm{e}^{-x}$. Or pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x} > 0$.
Donc pour tout réel x, $f'(x) > 1 > 0$.
Ainsi la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
Variation de f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

(c) f est continue sur $\mathbb{R}$ car dérivable.
f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
$0 \in]-\infty ; +\infty[$ intervalle image de $\mathbb{R}$ par la fonction f. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α.
Or (E) : $\mathrm{e}^x = \frac{1}{x} \iff f(x) = 0$.
On en conclut que l'équation (E) admet une unique solution α.

(d) • $f\left(\frac{1}{2}\right) \approx -0,1 < 0$ à 10^{-1} près par excès.
• $f(1) \approx 0,6 > 0$ à 10^{-1} près par défaut.
• Donc $\alpha \in \left[\dfrac{1}{2} ; 1\right]$.

(e) Soit $x \in [0, \alpha]$. $0 \leqslant x \leqslant \alpha \iff f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(\alpha) \iff -1 \leqslant f(x) \leqslant 0$
Ainsi f est négative sur $[0, \alpha]$.

II. Deuxième approche

1. $$\begin{aligned} g(x)=x &\iff \frac{1+x}{1+\mathrm{e}^x}=x \\ &\iff 1+x=x(1+\mathrm{e}^x) \\ &\iff 1+x=x+x\mathrm{e}^x \\ &\iff 1=x\mathrm{e}^x \\ &\iff \mathrm{e}^x=\frac{1}{x} \\ &\iff g(x)=x \end{aligned}$$
2. On a vu en I-2.(b) que α était l'unique solution dans $[0;1]$ de l'équation $f(x)=0$ qui est équivalente à $g(x)=x$. En conséquence α est l'unique solution dans $[0;1]$ de l'équation $g(x)=x$.
3. La fonction g est dérivable sur $[0,1]$ et pour tout x de $[0;1]$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1(1+\mathrm{e}^x)-(1+x)\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2} \\ &= \frac{1+\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x-x\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2} \\ &= \frac{1-x\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2} \\ &= \frac{-\mathrm{e}^x f(x)}{(1+\mathrm{e}^x)^2} \end{aligned}$$

Puisque $\dfrac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}>0$, $g'(x)$ et $f(x)$ sont de signes contraires.
Donc, d'après I - 2 (d), f étant positive sur $[0,\alpha]$, pour tout x de $[0,\alpha]$, $g'(x)\geqslant 0$.
Ainsi la fonction g est croissante sur $[0,\alpha]$.

III. Construction d'une suite de réels ayant pour limite α

1. Soit $\mathscr{P}_n$: « $0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant\alpha$ ».
   - **Initialisation** : vérifions que $\mathscr{P}_0$ est vraie.
   $u_0=0$ et $u_1=g(0)=1/2$. Or d'après I-2.(c), $\frac{1}{2}\leqslant\alpha$. Donc $0\leqslant u_0\leqslant u_1\leqslant\alpha$.
   - **Hérédité** : soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie. Démontrons alors, sous cette hypothèse, que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
   On sait que g est croissante sur $[0,\alpha]$ donc g conserve l'ordre sur cet intervalle.
   Or, d'après l'hypothèse de récurrence, $0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant\alpha$.
   Donc $g(0)\leqslant g(u_n)\leqslant g(u_{n+1})\leqslant g(\alpha)$
   avec $g(0)=1/2$; $g(u_n)=u_{n+1}$; $g(u_{n+1})=u_{n+2}$ et $g(\alpha)=\alpha$.
   Par conséquent $0\leqslant\frac{1}{2}\leqslant u_{n+1}\leqslant u_{n+2}\leqslant\alpha$ et $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
   - **Conclusion** : le principe de récurrence permet de conclure que pour tout entier naturel n, $0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant\alpha$
2. De la question précédente, il vient que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante
   Cette suite est également majorée par α. Il en résulte que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
3. Notons ℓ la limite de la suite (u_n). Alors il est clair que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=\ell$
   $\lim_{n\to+\infty}u_n=\ell$ et g est continue sur $[0;1]$ donc g est continue au point ℓ .
   D'où $\lim\limits_{x\to\ell}g(x)=g(\ell)$. On en déduit par composition que $\lim\limits_{n\to+\infty}g(u_n)=g(\ell)$

Or par définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\forall\, n \in \mathbb{N},\ g(u_n) = u_{n+1}$.

Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = g(\ell)$. Par unicité de la limite d'une suite, on en déduit que $g(\ell) = \ell$ autrement dit ℓ est une solution dans $[0,1]$ de l'équation $g(x) = x$.

Or cette équation admet α pour unique solution. Donc $\ell = \alpha$.

4. La calculatrice fournit $u_4 \approx 0,567\,143$ à 10^{-6} près par défaut (valeur arrondie).

Correction exercice n^{o}7

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3}{4}x^2 - 2x + 3$.

1. $f'(x) = \dfrac{3}{2}x - 2 = \dfrac{3}{2}\left(x - \dfrac{4}{3}\right)$, donc $f'(x)$ est du signe de $x - \dfrac{4}{3}$ donc s'annule et change de signe pour $x = \dfrac{4}{3}$.
   De plus, $f\left(\dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{5}{3}$.
   On établit le tableau des variations de f (les limites ne sont pas demandées) :

x	$-\infty$	$\frac{4}{3}$	$+\infty$
Variation de f	$\searrow$	$\frac{5}{3}$	$\nearrow$

2. D'après le résultat précédent la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[\dfrac{4}{3}\,;\,2\right]$, ainsi elle conserve l'ordre sur cet intervalle.
   On a donc : $\dfrac{4}{3} \leqslant x \leqslant 2 \Longrightarrow f\left(\dfrac{4}{3}\right) \leqslant f(x) \leqslant f(2)$.
   Or $f\left(\dfrac{4}{3}\right) = 2$.
   Donc $\dfrac{5}{3} \leqslant f(x) \leqslant 2$ et *à fortiori* : $\dfrac{4}{3} \leqslant f(x) \leqslant 2$.
3. Pour tout x réel,

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \frac{3}{4}x^2 - 2x + 3 - x \\ &= \frac{3}{4}x^2 - 3x + 3 \\ &= \frac{3}{4}\left(x^2 - 4x + 4\right) \\ &= \frac{3}{4}(x-2)^2 \end{aligned}$$

   Pour tout réel x, $(x-2)^2 \geqslant 0$ donc $f(x) - x \geqslant 0$ soit $x \leqslant f(x)$.
4. Étude du cas : $\dfrac{4}{3} \leqslant u_0 \leqslant 2$.
   (a) Démontrons par récurrence que la proposition $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$ est vraie pour tout entier naturel n.
   - **Initialisation**
     D'après la question précédente, pour $x \in \left[\dfrac{4}{3}\,;\,2\right]$, on a $x \leqslant f(x)$.
     Or $u_0 \in \left[\dfrac{4}{3}\,;\,2\right]$ donc $u_0 \leqslant f(u_0)$, ce qui revient à $u_0 \leqslant u_1$.

De plus, si $x \in \left[\frac{4}{3}~;~2\right]$, $f(x) \in \left[\frac{4}{3}~;~2\right]$.

Or $u_0 \in \left[\frac{4}{3}~;~2\right]$ donc $f(u_0) \in \left[\frac{4}{3}~;~2\right]$ et donc $u_1 \in \left[\frac{4}{3}~;~2\right]$ et donc $u_{n+1} \leqslant 2$.

Donc $u_0 \leqslant u_1 \leqslant 2$; la propriété est vraie au rang $n = 0$.

- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la proposition vraie au rang n, c'est-à-dire $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.

  On est dans l'intervalle $\left[\frac{4}{3}~;~2\right]$ où la fonction f est strictement croissante ; on en déduit : $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(2)$ étant que f conserve l'ordre sur $\left[\frac{4}{3}~;~2\right]$ du fait de sa croissance.

  Or $f(u_n) = u_{n+1}$, $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ et $f(2) = 2$.

  Donc on a : $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 2$; la proposition est héréditaire.

- **Conclusion**

  La proposition est vraie au rang 0 et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) — Pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant u_{n+1}$: la suite (u_n) est croissante.

— Pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 2$: la suite (u_n) est majorée par 2.

— On en déduit que la suite (u_n) est convergente vers une limite ℓ telle que $\ell \leqslant 2$.

(c) La suite (u_n) est définie par $f(u_n) = u_{n+1}$ où f est une fonction polynôme donc continue sur $\mathbb{R}$ donc en ℓ.

Or (u_n) est convergente, soit ℓ sa limite.

On a donc, par passage à la limite, : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} f(u_n)$ soit $f(\ell) = \ell$.

$$\begin{aligned}\text{Or, } f(\ell) = \ell &\iff f(\ell) - \ell = 0\\ &\iff \frac{3}{4}(\ell - 2)^2 = 0\\ &\iff \ell = 2\end{aligned}$$

La suite (u_n) converge donc vers 2.

5. Étude du cas : $u_0 = 3$. On admet que dans ce cas la suite (u_n) tend vers $+\infty$.

   On complète la fonction « `seuil` » suivante écrite en Python, afin qu'elle renvoie la plus petite valeur de n telle que u_n soit supérieur ou égal à 100.

```
def seuil() :
  u = 3
  n = 0
  while u < 100
      u = 3*u*u/4 - 2*u + 3
      n = n + 1
  return n
```

6. Étude du cas : $u_0 > 2$.

   Pour tout réel x, on a : $x \leqslant f(x)$ donc, pour tout n, $u_n \leqslant f(u_n)$ soit $u_n \leqslant u_{n+1}$; la suite (u_n) est donc croissante.

   On en déduit que pour tout n, on a : $u_n \geqslant u_0$.

   Si la suite (u_n) converge vers un réel ℓ, on aura donc : $\ell \geqslant u_0$.

   On a vu que la seule limite possible de la suite (u_n) était $\ell = 2$; donc on ne peut pas avoir $\ell \geqslant u_0$ car $u_0 > 2$.

   Pour $u_0 > 2$, la suite (u_n) n'est donc pas convergente.