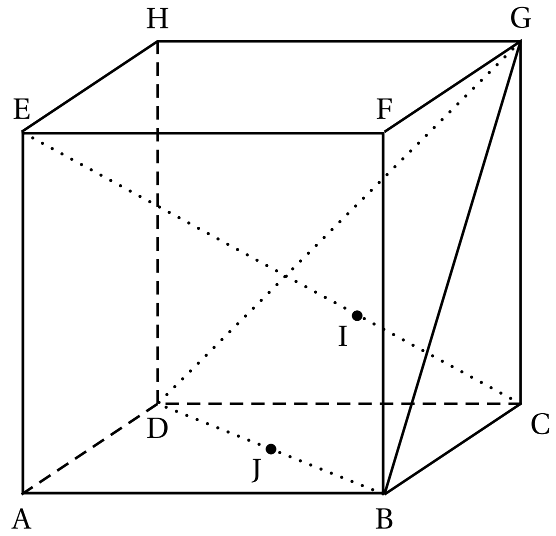
Vacances de Pâques

Mercredi 09 avril 2025

Exercices de révisions

Terminale Maths groupe 1

Exercice 1.



On considère le cube ABCDEFGH d'arête 1.
On appelle I le point d'intersection du plan (GBD) avec la droite (EC).
L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{AD}\,,\,\overrightarrow{AE}\right)$.

1. Donner dans ce repère les coordonnées des points E, C, G.

2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EC).

3. Démontrer que la droite (EC) est orthogonale au plan (GBD).

4. **a.** Justifier qu'une équation cartésienne du plan (GBD) est :

$$x + y - z - 1 = 0.$$

b. Montrer que le point I a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}\,;\,\frac{2}{3}\,;\,\frac{1}{3}\right)$.

c. En déduire que la distance du point E au plan (GBD) est égale à $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

5. **a.** Démontrer que le triangle BDG est équilatéral.

b. Calculer l'aire du triangle BDG.
On pourra utiliser le point J, milieu du segment [BD].

6. Justifier que le volume du tétraèdre EGBD est égal à $\frac{1}{3}$.

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par $V = \frac{1}{3}Bh$ *où* B *est l'aire d'une base du tétraèdre et* h *est la hauteur relative à cette base.*

Exercice 2.

1. Partie A - Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle :

$$y' - 2y = e^{2x}, \quad (E).$$

1. Démontrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = xe^{2x}$ est une solution de (E).
2. Résoudre l'équation différentielle : $y' - 2y = 0 \quad (E_0)$.
3. Démontrer qu'une fonction v définie sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) si et seulement si $v - u$ est solution de (E_0).
4. En déduire toutes les solutions de l'équation (E).
5. Déterminer la fonction, solution de (E), qui prend la valeur 1 en 0.

2. Étude d'une fonction

Le plan est rapporté au repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x+1)e^{2x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Étudier la limite de f en $+\infty$ puis la limite de f en $-\infty$.
2. Soit x un nombre réel. Calculer $f'(x)$.
   Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variations.
   Préciser le signe de $f(x)$ pour tout réel x.
3. Soit un réel α strictement inférieur à -1. On considère le domaine plan $\mathscr{D}$ limité par $\mathscr{C}$, les droites d'équation $x = \alpha$, $x = -1$ et l'axe des abscisses.
   a. À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'aire $\mathscr{D}(\alpha)$ du domaine $\mathscr{D}$.
   b. Déterminer la limite de $\mathscr{D}(\alpha)$ lorsque α tend vers $-\infty$.

Exercice 3.

Partie I.

Lors de la préparation d'un concours, un élève n'a étudié que 50 des 100 leçons.
On a mis 100 papiers contenant chacun une question dans une urne, ces questions portant sur des leçons différentes. Le candidat tire simultanément au hasard 2 papiers.
On donnera les réponses sous forme de fractions irréductibles.

1. Dénombrer le nombre total d'issues possibles.
2. Calculer la probabilité qu'il ne connaisse aucun de ces sujets.
3. Calculer la probabilité qu'il connaisse les deux sujets ?
4. Calculer la probabilité qu'il connaisse un et un seul de ces sujets.
5. Calculer la probabilité qu'il connaisse au moins un de ces sujets.

Partie II.

On considère maintenant que l'élève a étudié n des 100 leçons (n étant un entier naturel inférieur ou égal à 100).

1. Quelle est la probabilité p_n qu'il connaisse au moins un de ces sujets ?
2. Déterminer les entiers n tels que p_n soit supérieur ou égal à $0,95$.

Exercice 4.

Partie A

⋆ Étude d'une fonction f et de sa courbe représentative $\mathscr{C}$
On considère la fonction f, définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x-2)$$

et on désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative relativement au repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et 0.
2. Montrer que f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et calculer $f'(x)$.
3. Soit u la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $u(x)=\ln x+x-3$.
   a. Étudier les variations de u.
   b. Montrer que l'équation $u(x)=0$ possède une solution unique α dans l'intervalle $[2\,;3]$. Montrer que $2{,}20<\alpha<2{,}21$.
   c. Étudier le signe de $u(x)$ sur $[0\,;\,+\infty[$.
4. **a.** Étudier les variations de f.
   b. Exprimer $\ln\alpha$ comme polynôme en α.
   Montrer que $f(\alpha)=-\dfrac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$.

Partie B.

⋆ Étude d'une primitive de f sur $]0\,;\,+\infty[$.
Soit F la primitive de f sur $[0\,;\,+\infty[$ qui s'annule pour $x=1$.
On appelle (Γ) la courbe représentative de F relativement au repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** Sans calculer $F(x)$, étudier les variations de F sur $]0\,;\,+\infty[$.
   b. Que peut-on dire des tangentes à (Γ) en ses points d'abscisses 1 et e^2 ?
2. Calcul de $F(x)$.
   a. x étant un réel strictement positif, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^x \ln t\,\mathrm{d}t$ (on pourra faire une intégration par parties).
   b. Montrer que, pour tout x strictement positif :
   $$f(x)=\ln x-\frac{\ln x}{x}+\frac{2}{x}-2.$$
   c. En déduire l'expression de $F(x)$ en fonction de x.

Exercice 5.

Dans tout le texte e désigne le nombre réel qui vérifie $\ln \mathrm{e} = 1$.
On considère la fonction f définie sur $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x + x\mathrm{e}}{x^2}.$$

On note Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},~\vec{u},~\vec{v}\right)$, unité graphique : 2 cm.

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$g(x) = -2\ln x - x\mathrm{e} + 1.$$

1. Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$.
2. Étudier le sens de variation de g.
3. Montrer que dans $[0{,}5\,;\,1]$ l'équation $g(x) = 0$ admet une solution et une seule notée α. Déterminer un encadrement de α à 0,1 près.
4. En déduire le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.

Partie B : étude de la fonction *f*

1. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Soit f' la fonction dérivée de f. Vérifier que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$ puis étudier le sens de variation de f sur $]0~;~+\infty[$.
3. Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{1 + \alpha\mathrm{e}}{2\alpha^2}$.
4. Donner le tableau de variations de f.
5. Construire Γ.

Partie C : intégrale et suite

Soit $I_n = \displaystyle\int_{\mathrm{e}^n}^{\mathrm{e}^{n+1}} \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ et $A_n = \displaystyle\int_{\mathrm{e}^n}^{\mathrm{e}^{n+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout entier naturel n.

1. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que :

$$I_n = \frac{n+1}{\mathrm{e}^n} - \frac{n+2}{\mathrm{e}^{n+1}}.$$

2.
   a. Montrer que $A_n = I_n + \mathrm{e}$.
   b. Calculer I_0 et A_0.
   c. Donner une interprétation géométrique de A_0.
3. Montrer que la suite (A_n) converge vers e.

Exercice 6.

1. Une urne contient deux boules blanches et n noires, indiscernables au toucher.
   Un joueur tire simultanément deux boules de l'urne et on note A_2 l'évènement : « le joueur a tiré deux boules blanches ».
   Déterminer n pour que la probabilité $p(A_2)$ de l'évènement A_2 soit égale à $\frac{1}{15}$?
2. Dans **toute la suite du problème** on prend $n = 4$.
   A - Un joueur tire simultanément deux boules de l'urne et on note :
   A_0 l'évènement : « le joueur a tiré deux boules noires » ;
   A_1 l'évènement : « le joueur a tiré une boule noire et une blanche » ;
   A_2 l'évènement : « le joueur a tiré deux boules blanches ».
   - **a.** Calculer la probabilité des évènements A_0 et A_1.
   - **b.** Lors de ce tirage, le joueur marque trois points pour chaque boule blanche tirée et marque deux points pour chaque boule noire tirée.
     Soit X le nombre de points marqués.
     Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
     Déterminer $\mathrm{E}(X)$.

Exercice 7.

On considère l'équation différentielle

$$(E_0): \quad y' = y$$

où y est une fonction dérivable de la variable réelle x.

1. Démontrer que l'unique fonction constante solution de l'équation différentielle (E_0) est la fonction nulle.
2. Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle (E_0).
   On considère l'équation différentielle

   $$(E): \quad y' = y - \cos(x) - 3\sin(x)$$

   où y est une fonction dérivable de la variable réelle x.
3. La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2\cos(x) + \sin(x)$.
   On admet qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Démontrer que la fonction h est solution de l'équation différentielle (E).
4. On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Démontrer que : « f est solution de (E) » est équivalent à « $f - h$ est solution de (E_0) ».
5. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).
6. Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 0$.
7. Calculer :

   $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-2\mathrm{e}^x + \sin(x) + 2\cos(x)\right] \mathrm{d}x.$$

Exercice 8.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère :

- le plan $\mathscr{P}_1$ dont une équation cartésienne est $2x + y - z + 2 = 0$,
- le plan $\mathscr{P}_2$ passant par le point B(1 ; 1 ; 2) et dont un vecteur normal est $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

1. **a.** Donner les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{n_1}$ normal au plan $\mathscr{P}_1$.

b. On rappelle que deux plans sont perpendiculaires si un vecteur normal à l'un des plans est orthogonal à un vecteur normal à l'autre plan.

Montrer que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont perpendiculaires.

2. **a.** Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}_2$.

b. On note Δ la droite dont une représentation paramétrique est : $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 0\\ y &=& -2+t\\ z &=& t\end{array}\right., \quad t \in \mathbb{R}$.

Montrer que la droite Δ est l'intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.

On considère le point A(1 ; 1 ; 1) et on admet que le point A n'appartient ni à $\mathscr{P}_1$ ni à $\mathscr{P}_2$.

On note H le projeté orthogonal du point A sur la droite Δ.

3. On rappelle que, d'après la question 2. b, la droite Δ est l'ensemble des points M_t de coordonnées $(0\ ;\ -2+t\ ;\ t)$, où t désigne un nombre réel quelconque.

a. Montrer que, pour tout réel t, $\mathrm{A}M_t = \sqrt{2t^2 - 8t + 11}$.

b. En déduire que $\mathrm{AH} = \sqrt{3}$.

4. On note $\mathscr{D}_1$ la droite orthogonale au plan $\mathscr{P}_1$ passant par le point A et H_1 le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathscr{P}_1$.

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}_1$.

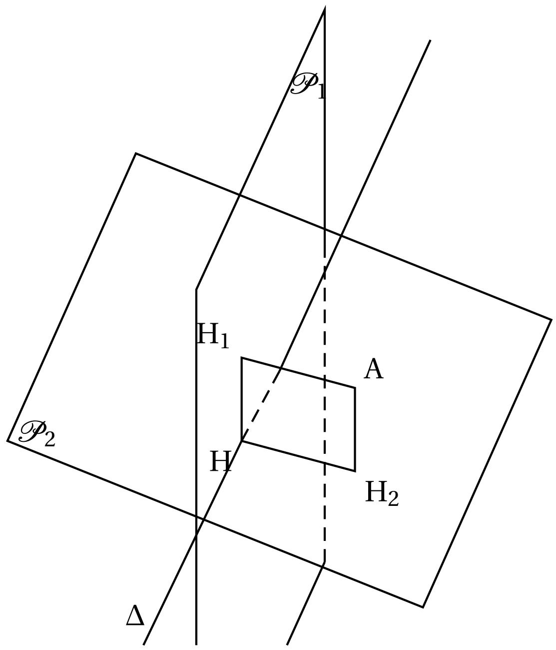
b. En déduire que le point H_1 a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ \frac{5}{3}\right)$.

5. Soit H_2 le projeté orthogonal de A sur le plan $\mathscr{P}_2$.

On admet que H_2 a pour coordonnées $\left(\frac{4}{3}\ ;\ \frac{2}{3}\ ;\ \frac{4}{3}\right)$ et que H a pour coordonnées $(0 ; 0 ; 2)$.

Sur le schéma ci-contre, les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont représentés, ainsi que les points A, H_1, H_2, H.

Montrer que $\mathrm{AH}_1\mathrm{HH}_2$ est un rectangle.



Exercice 9.

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - \ln\left(x^2 + 1\right).$$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = x$.
2. Justifier tous les éléments du tableau de variations ci-dessous à l'exception de la limite de la fonction f en $+\infty$ que l'on admet :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$+$	
Variations de f	$-\infty$				$+\infty$

3. Montrer que, pour tout réel x appartenant à $[0\,;1]$, $f(x)$ appartient à $[0\,;1]$.
4. On considère le script suivant écrit en langage Python :

```
def seuil ():
    n=0
    while n-ln(n**2+1) < A :
      n=n+1
    return n
```

   a. Que fait ce programme ?

   b. Déterminer la valeur n fournie par l'algorithme lorsque la valeur saisie pour A est 100.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n - \ln\left(u_n^2 + 1\right)$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n appartient à $[0\,;1]$.
2. Étudier les variations de la suite (u_n).
3. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
4. On note ℓ la limite de la suite (u_n).

   a. Démontrer que $f(\ell) = \ell$.

   b. En déduire la valeur de ℓ.

Exercice 10.

Une entreprise appelle des personnes par téléphone pour leur vendre un produit.

- L'entreprise appelle chaque personne une première fois :
  - la probabilité que la personne ne décroche pas est égale à 0,6 ;
  - si la personne décroche, la probabilité qu'elle achète le produit est égale à 0,3.
- Si la personne n'a pas décroché au premier appel, on procède à un second appel :
  - la probabilité que la personne ne décroche pas est égale à $0,3$;
  - si la personne décroche, la probabilité qu'elle achète le produit est égale à 0,2.
- Si une personne ne décroche pas au second appel, on cesse de la contacter.

On choisit une personne au hasard et on considère les évènements suivants :

D_1 : « la personne décroche au premier appel » ;

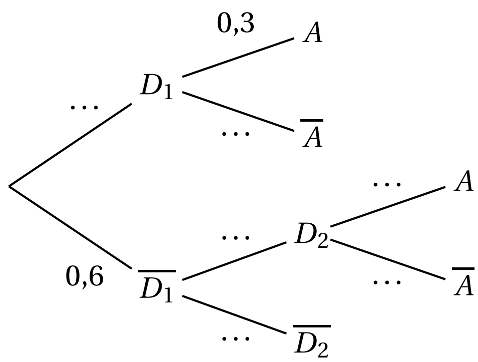
D_2 : « la personne décroche au deuxième appel » ;

A : « la personne achète le produit ».

Les deux parties peuvent être traitées de manière indépendante

Partie A

1. Compléter l'arbre pondéré ci-contre.
2. En utilisant l'arbre pondéré, montrer que la probabilité de l'évènement A est $P(A) = 0,204$.
3. On sait que la personne a acheté le produit. Quelle est la probabilité qu'elle ait décroché au premier appel ?



Partie B

On rappelle que, pour une personne donnée, la probabilité qu'elle achète le produit est égale à $0,204$.

1. On considère un échantillon aléatoire de 30 personnes.
   On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes de l'échantillon qui achètent le produit.
   - **a.** On admet que X suit une loi binomiale. Donner, sans justifier, ses paramètres.
   - **b.** Déterminer la probabilité qu'exactement 6 personnes de l'échantillon achètent le produit. Arrondir le résultat au millième.
   - **c.** Calculer l'espérance de la variable aléatoire X.

   Interpréter le résultat.
2. Soit n un entier naturel non nul.
   On considère désormais un échantillon de n personnes.
   Déterminer la plus petite valeur de n telle que la probabilité qu'au moins l'une des personnes de l'échantillon achète le produit soit supérieure ou égale à $0,99$.